Dr. Ing. GAETANO IVALDI

La scienza relativa all'esperienza

I principii della meccanica come veri in senso relativo all'esperienza invece che assoluto

Seguito della pubblicazione
« Preliminari o della matematica relativa all' esperienza »

Estratto della Rivista " L' INDUSTRIA ,,
Vol. XLVIII - N. 3-4-5-6-7-9-10-11-12-1934 — Vol. XLIX - N. 1-1935

DIREZIONE - AMMINISTRAZIONE
MILANO
VIA PETRELLA N. 14
MCMXXXV

Libreria Italiana — Genova, Piazza Corvetto 2-4 - Via M. Piaggio, 1-2

I principii della meccanica come veri in senso relativo all'esperienza, invece che assoluto

Dr. Ing. Gaetano Ivaldi

RIASSUNTO. — Galileo prima, e Newton dopo, hanno dedotti i due primi principi fondamentali della meccanica detta classica (principio dell'inerzia come proporzionale alla sola massa, e principio di proporzionalità diretta fra accelerazioni e forze nel caso di una data massa, di proporzionalità inversa fra accelerazioni e masse nel caso di una data forza) dalla considerazione e dallo studio dei risultati della realtà, dell'esperienza nei riguardi di una massa libera, o non soggetta a legami e vincoli, di una forza agente senza braccio di leva ed avente per punto di applicazione il centro della massa sulla quale la forza agisce. Nei quali casi, e come dice Newton, la direzione della forza coincide con quella dello spostamento del centro di massa.

Del pari Newton deduce il terzo principio fondamentale della meccanica Galileiana e Newtoniana, o principio di eguaglianza fra azione e reazione, considerando il caso di sistemi di forze in equilibrio, o di sistemi elastici.

Per il fatto che tanto Galileo che Newton hanno tratti, hanno attinti i principi della Loro meccanica dai risultati della realtà, dell'esperienza, e ciò che la realtà e l'esperienza dicono essere vero è certamente vero, deve dirsi che tali principi rispondono al vero. Al vero, però, relativamente ai casi esaminati da Galileo e da Newton. Non in senso assoluto, il più generale, e quindi per qualsiasi altro e differente caso che nella pratica può presentarsi.

In scienza, e come dice Galileo, devesi imitar la natura, la quale procede dal facile al difficile, dal semplice al complesso. Devonsi quindi, in scienza, considerar per primi i casi più semplici, più facili. Vedere qual'è la verità che ad essi corrisponde. Come Galileo e Newton hanno fatto.

Ma la verità così trovata, così accertata, non dev'essere considerata come verità assoluta, come verità anche in casi diversi e più complessi, come erroneamente si è fatto e si fa. Essa dev'essere invece lo spunto, il punto di partenza atto a farci conoscere la verità che a casi diversi e più complessi è correlativa.

Volendo usare una metafora attinente alla matematica, si può dire che la verità relativa al caso più semplice, e che noi conosciamo, è come il dato di un problema, per mezzo del quale perveniamo alla conoscenza o determinazione della incognita del problema. In altre parole, il dato del problema, e che conosciamo, ha per correlativa la verità che compete al caso più semplice, e che pure conosciamo. L'incognita del problema, e che non conosciamo e vogliamo conoscere, vogliamo determinare, ha per correlativa la verità che compete al caso diverso e più complesso, e che pure vogliamo conoscere, determinare.

E' questo che fa l'autore della presente memoria, assumendo come dato conosciuto, come vero, che nel caso di una massa libera l'inerzia è proporzionale a questa massa, e che nel caso di una forza avente per punto di applicazione il centro di massa, e quando la direzione della forza coincide con quella dello spostamento di tale centro, si verifichi la formula f = m a, esprimente il secondo principio fondamentale della meccanica di Galileo e di Newton. Passa poi a vedere, in questo articolo, quali risultati si ottengono nel caso diverso e più complesso in cui la massa è ancora libera, ma il punto di applicazione della forza non coincide col centro di massa, e la direzione della forza è diversa da quella dello spostamento.

Si vedrà poi, in altro articolo, quale risultato si ottiene nel caso più complesso ancora in cui la massa è vincolata ad un centro o ad un asse di rotazione rigido e fisso, e la forza agisce con un certo braccio di leva rispetto a tale asse o centro.

I tre principi fondamentali della meccanica di Galileo e di Newton. - Loro deduzione dalla disamina del caso di una massa libera, e quando la direzione della forza coincide con quella dello spostamento del centro della massa sulla quale la forza agisce.

Galileo, Newton, ed altri, dicono che in Scienza, ed in particolare nel campo della meccanica, devesi procedere dal facile al difficile, dal semplice al complesso. Perchè è così che procede la Natura. E l'uomo deve seguire, nelle sue indagini, le leggi e le vie indicate dalla Natura.

Il dir questo è giusto e vero. Ma non è giusto il dire, come è stato detto e da molti si dice, che ciò che è vero nei casi più semplici stati considerati e studiati da Galileo, da Newton,... deve ritenersi per vero in casi diversi e più complessi. Vero in generale e sempre, in senso assoluto.

Dire che devesi giurare su Galileo, su Newton, su Cartesio,... come prima di questi Grandi si giurava su Aristotile, su Platone,... Dire che i principi di Galileo e di Newton devono considerarsi come indiscutibilmente acquisiti alla Scienza, come nel Medio Evo si pretendeva che fossero indiscutibilmente acquisiti, e fossero addirittura pressochè divini, i principi di Aristotile.

Perchè il far questo porta l'uomo non a liberarsi dalle cause di errore del passato, ma a ricadervi. O quanto meno a ricadere in errori analoghi.

***

Ad ogni modo, vedo quel che hanno detto Galileo, Newton,... seguendo il concetto che in Scienza si debba procedere dal semplice al complesso, e considerare quindi per primi i casi più semplici. Essi hanno detto, in sostanza e nei riguardi della meccanica:

Sia m la massa o quantità di materia di un corpo. Il corpo o, meglio, la sua massa, o è libera o non lo è. In altri termini, il corpo o non è soggetto a legami o vincoli da parte dei corpi ad esso circostanti. Od è invece legato, vincolato.

Il primo caso è il più semplice. Ed è un tal caso che è stato esaminato da Galileo, da Newton.

Si può inoltre dire:

Il corpo di massa m venga assoggettato all'azione di una forza f. E per l'azione di questa forza venga obbligato a muoversi, a spostarsi nello spazio.

Chiamo col nome di centro della massa del corpo, o centro di massa, un punto nel quale la massa si può immaginare concentrata. Indico poi con:

s lo spazio che viene percorso dal centro di massa del corpo nel tempo t, per l'azione della forza f;

d s lo spazio o spostamento piccolissimo che viene percorso dallo stesso centro di massa in un tempo piccolissimo dt, a partire da un certo istante o tempo t;

$$v = \frac{ds}{dt}$$ la sua velocità al tempo t;

$$a = \frac{d^2s}{dt^2}$$ l'accelerazione, sempre del centro di massa del corpo.

Come si sa dall'esperienza, di solito si osserva che la direzione della forza che agisce sopra un corpo non coincide con quella dello spostamento del suo centro di massa. Così si consideri il moto della Terra attorno al Sole, o della Luna attorno alla Terra... Il centro della Terra descrive, attorno al Sole e nel tempo di un anno, una linea o traiettoria ellit-

tica è che è pressochè circolare (1). Il Sole si trova su per giù nel centro della quasi circonferenza. E mentre lo spostamento del centro della Terra avviene lungo questa circonferenza, la forza, cui lo spostamento si deve, è diretta secondo la congiungente il centro del Sole col centro della Terra. Quindi la direzione della forza è su per giù quella del raggio della circonferenza.

Pertanto se si indica con A la posizione del centro di massa della Terra ad un tempo t, la forza è su per giù diretta secondo il raggio della circonferenza, ecc., condotto per il punto A, mentre lo spostamento è su per giù diretto secondo la tangente alla circonferenza condotta per A. Onde si può dire che la direzione della forza e quella dello spostamento ad un certo istante o tempo t sono pressochè normali fra di loro.

In altri casi, però, può darsi che la direzione di una forza coincida con quella dello spostamento del centro della massa sulla quale la forza agisce. Come avviene nella caduta libera dei gravi in presenza della Terra, per l'azione della forza di attrazione che la Terra esercita su di essi.

Ora il secondo caso, o caso in cui la direzione della forza è eguale a quella dello spostamento ecc., è il più semplice. Ed è ancora questo caso che è stato considerato ed esaminato da Galileo, da Newton...

I quali, pertanto, hanno esaminato il presupposto o caso più semplice di una massa libera e tale che la direzione dello spostamento del suo centro di massa avesse a coincidere con la direzione della forza. E tale disamina li ha condotti ad enunciare i seguenti tre principi noti col nome di principi fondamentali della meccanica di Galileo e di Newton.

Primo principio. — Un corpo libero persevera nello stato di quiete o di moto rettilineo uniforme fino a quando non agisca su di esso una forza esercitata dall'esterno (2). La riluttanza (come dice Newton) od incapacità o resistenza di un corpo a variare di velocità (come dicono altri), chiamasi inerzia. E l'inerzia di un corpo è proporzionale alla quantità di materia o massa del corpo. (3)

Secondo principio. — La variazione del moto di un corpo, o variazione della sua velocità (che viene poi rappresentata dal rapporto tra la variazione ed il correlativo tempo) è proporzionale alla forza che sul corpo agisce, ed è diretta secondo la linea di azione della forza. (4)

Il rapporto fra la variazione della velocità di un corpo

---

(1) Veramente è una spirale ellittica e pressochè circolare, ma in un primo tempo, ed anche per passare dal più semplice al più complesso, è bene considerare il Sole, o la Terra, come fissi nei rapporti del rispettivo pianeta, o satellite. Venendo allora la traiettoria ad essere piana.

(2) Più precisamente, Newton dice:

Lex I - Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quâtenus à viribus impressis cogitur statum illum mutare. In Philosophiae Naturalis Principia Mathematica - Auctore Isaaco Newtono ecc. - Tomus Primus - Genevae - Typis Barrillot & Filii - MDCCXXXIX. - Pag. 20. Questa edizione delle opere di Newton è posseduta dall'autore della presente opera, il quale la mette a disposizione del lettore che volesse consultarla.

(3) Alle pagine 4 e 5 della sua opera - Philosophiae Naturalis ecc., Newton dice: Inest omni materiae vis insita passiva, seu inertia, ex qua nullus motus, nullaque tendentia ad motum resultat, sed quae consistit in renixu quo corpus quodlibet, cuilibet vi externae mutationem status, id est, motus vel quietis inducere conanti resistit... Quia autem vis illa inertiae eadem in omnibus aequalibus materiae partibus reperitur, consequens est ut sit materiae proportionalis; dupla in massa duplicata, tripla in triplicata. Majoribus etiam mutationibus corpora magis resistunt quam minoribus, estque resistentia actualis magnitudini mutationis proportionalis.

(4) A pagina 9 di « Principia Philosophiae ecc. », dice Newton:

Definitio VII - Vis centripetae Quantitas Acceleratrix est ipsius mensura Velocitati proportionalis, quam dato tempore generat . . . . Quare si manente vi constante, celeritas e tempus varient, erit vis acceleratrix in ratione composita ex directa celeritatis genitae & reciproca temporis. Si igitur vis acceleratrix dicatur, G; celeritas producta C; tempus quo producitur, T, erit G = C : T, & G T = C, & T = C : G. Licet autem variet vis acceleratrix, eadem tamen est illius mensura, modò celeritas nascens seu initio motus tempore quàm minimo producta consideretur, tunc enim vis agit uniformiter.

A pagina 310 dello stesso Tomus Primus, Newton esamina il caso di uno spazio piccolissimo che venga percorso in un tempo piccolissimo. E dice:

Sit spatium à corpore cadente descriptum A E = x, velocitas in E acquisita = v, tempus quo A E, percurritur = t, vis centripeta in E, hoc est, E G = y, erunt dx, dv, dt, quantitatum x, v, t, fluxiones seu incrementa nascentia vel evanescentia, cumque velocitas per spatium nascens D E, sit uniformis erit $v = \frac{dx}{dt}$, ac proindè velocitatis incrementum $dv = \frac{d\,dx}{dt}$, si sumatur dt, constans sed est $y = \frac{dv}{dt}$, adeòque si loco dv, substituatur $\frac{d\,dx}{dt}$, invenietur $y = \frac{d\,dx}{dt^2}$ . . . . . .

Superior expressio vis centripetae y, $= \frac{dv}{dt}$ si vis centripeta consideretur ut gravitas in centrum, supponit massam corporum aut eandem esse aut ponderibus proportionalem. Verum si pondera non sint massis proportionalia, diversaeque inter se massae conferantur, tum habenda est massarum ratio ut determinetur tota corporis gravitas, seu vis tota quâ centrum versus urgetur. Sit vis illa = y, & massa = m, erit quidem semper $v = \frac{dx}{dt}$, at fiet $y = \frac{m\,dv}{dt}$. Etenim vis centripeta considerari potest ut potentia motrix, quae corpori indesinenter applicata, motum in eo sua actione producit, quaeque tempusculo evanescente eadem constanter permanet, & unformiter agit. Porrò factum ex potentia motrice uniformiter agente & tempore actionis aequivalet quantitati actionis; crescit enim actionis quantitas cum potentia motrice & tempore actionis proportionaliter, & factum ex massa corporis & celeritate, seu quantitas motus producti est id quod actione illâ effectum est, seu quantitati actionis aequipollet, cum necessarius sit nexus inter quantitatem actionis & quantitatem effectus e alter alteri aequivalent. Quare y dt = m dv, & $y = m\frac{dv}{dt}$.

Newton enuncia poi così la seconda legge della sua meccanica, alla pagina 21 del 1° Volume dell'Opera sopra citata:

Lex II - Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, & fieri secundum lineam rectam quâ vis illa imprimitur.

In oggi, e come si fa in quest'opera, lo spazio che viene percorso dal centro di massa di un corpo in un certo tempo t lo si suol indicare con la lettera s, invece che con la lettera x come fa Newton nei brani sopra riportati. Quindi in luogo di dx si scrive ds; di $v = \frac{dx}{dt}$ si suol scrive $v = \frac{ds}{dt}$.

che ha luogo in un certo tempo, e questo tempo, chiamasi accelerazione. Questa accelerazione, dice Newton, dev'essere direttamente proporzionale all'effetto dell'azione della forza ed inversamente proporzionale all'inerzia della massa sulla quale la forza agisce. Perciò se si indica con a l'accelerazione, con e l'effetto dell'azione della forza, con i l'inerzia, deve verificarsi una relazione del tipo $a = \frac{e}{i}$.

Ora nel caso di una massa libera, e quando si presupponga che la direzione della forza coincida con quella dello spostamento, della velocità, dell'accelerazione del centro della massa sulla quale la forza agisce, si trova che l'effetto dell'azione della forza è proporzionale alla forza. Che l'inerzia è proporzionale alla massa. Quindi se la forza la si indica con f, la massa con m, devono verificarsi le relazioni $a = \frac{f}{m}$; $f = m\,a$ (1). Cioè:

Nel caso di un corpo libero, e quando la direzione dello spostamento, della velocità, dell'accelerazione del suo centro di massa sono eguali alla direzione della forza che sul corpo agisce, l'accelerazione di questo corpo è direttamente proporzionale alla forza ed inversamente proporzionale alla massa.

Terzo principio. — Ad ogni azione corrisponde sempre una reazione eguale e contraria. Così se si hanno due corpi A e B, all'azione di A su B deve corrispondere una reazione eguale e contraria da parte di B su A. (2)

La disamina della deduzione di questo principio da parte di Newton, ed in ispecie degli esempi o casi che egli adduce per giustificarlo, fornisce una prova dell'errore in cui Newton cade col pretendere, come già prima aveva fatto Aristotile, che ciò che è vero in casi particolari e più semplici debba essere vero in generale e sempre.

Il differenziale secondo di una grandezza x lo si suol indicare col simbolo d^2x, invece che con d d x.

Ciò che Newton chiama vis centripeta $y = \frac{dv}{dt}$ è la forza di gravità corrispondente all'unità di massa, è l'accelerazione. E siccome questa accelerazione in oggi la si suol indicare con la lettera a, così invece di scrivere $y = \frac{dv}{dt}$ con $v = \frac{dx}{dt}$, e quindi $y = \frac{d\,dx}{dt^2}$, si suol scrivere $a = \frac{dv}{dt}$ con $v = \frac{ds}{dt}$, e quindi $a = \frac{d^2s}{dt^2}$.

In quanto, poi, quella che Newton chiama la potenza motrice, o forza agente, è diversa dalla accelerazione, conviene ed anzi devesi rappresentare le due grandezze con simboli diversi. Rappresentare la forza motrice col simbolo f. E allora in luogo di scrivere $y\,dt = m\,dv$, come fa Newton, devesi scrivere $f\,dt = m\,d\,v$; $f = m\frac{dv}{dt} = m\,a$.

(1) Viene da sè che il rapporto di proporzionalità si suppone eguale ad uno.

(2) A pag. 23 di Philosophiae Naturalis Principia Mathematica ecc., Newton dice:

Lex III - Actioni contrariam semper & aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & huius digitus à lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) aequaliter in lapidem: nam funis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem, ac lapidem versus equum; tantumque impediet progressum unius quantum promovet progressum alterius . . . . .

Invero, Newton considera dei sistemi in equilibrio, cioè dei sistemi di forze di risultante zero. Ed invece di limitarsi a dire che il principio di eguaglianza fra azione e reazione dev'essere, come è, vero per questi sistemi (ed anche, come si vedrà, per i sistemi che si comportano elasticamente), dice che esso è vero sempre.

Così Newton dice che se con un dito si esercita una certa pressione od azione sopra una pietra, questa reagisce con una forza eguale e contraria. Che all'azione del dito sulla pietra corrisponde una reazione eguale e contraria della pietra sul dito.

Dice che se un cavallo trascina un carro per mezzo di una corda, la corda reagisce con una forza eguale ed in senso contrario. Che quindi all'azione del cavallo sulla corda, diretta dal carro verso il cavallo, corrisponde una reazione eguale e contraria da parte della corda, diretta dal cavallo verso il carro, ecc.

Il dir questo sta bene, ma alla condizione che la corda sia di una resistenza tale da non rompersi, che la pietra sia di una durezza tale da non cedere all'azione o pressione esercitata dal dito.

Si supponga che il carro venga caricato via via di pesi, o venga comunque fatta aumentare la forza od azione necessaria per muoverlo, fino ad aversi la rottura della corda. Quando avviene ciò posso dire che il principio di eguaglianza fra azione e reazione è soddisfatto? Dire che alla forza di trazione esercitata dal cavallo sulla corda corrisponde una reazione eguale e contraria da parte di questa? No, perchè se si verificasse ciò la corda non si romperebbe. E la ragione o causa per cui la corda si rompe va ricercata nel fatto che essa non può più contrapporre una reazione eguale e contraria all'azione. Che invece cede a questa azione, venendosi ad avere che la reazione è minore dell'azione, fino a rompersi.

Suppongo che prima della rottura della corda il carro sia fermo, o si muova con velocità costante, venendo ad avere un sistema di forze in equilibrio. Se ad un certo momento la corda si rompe, vedo che il cavallo prende una rincorsa e si mette in moto rapido, se prima era fermo, o si muove di moto accelerato, aumentando di molto la sua velocità, se prima si muoveva con velocità costante, con moto uniforme.

E questo avviene perchè l'azione o forza esercitata dal cavallo non è più contrastata da una reazione in senso contrario da parte della corda. Perchè con la rottura della corda questa non reagisce più, mentre continua ad esistere l'azione promanante dal cavallo. Perchè l'azione è ora maggiore, e di molto maggiore, della reazione.

Del pari se il cavallo invece di tirare un carro e muoversi di moto uniforme, tira un cane, ed il cavallo si muove di moto accelerato, questo avviene perchè l'azione del cavallo sul cane è maggiore della reazione del cane sul cavallo.

Analogamente se con un dito premo contro una pietra e questa non cede, ed ho un sistema di forze in equilibrio, è vero il dire, come dice Newton, che si verifica il principio di eguaglianza fra azione e reazione. Come si verifica nei riguardi della pressione od azione esercitata, poniamo, da una casa che stia ferma e ritta contro il terreno su cui poggia, e della reazione del terreno contro la casa.

Ma si supponga di premere col dito contro dell'argilla, e che questa ceda. Allora dico che il cedimento avviene perchè l'azione e la reazione non sono eguali e contrarie, perchè la reazione dell'argilla contro il dito è minore dell'azione del dito sull'argilla.

Del pari si supponga di sovraccaricare una casa innalzandola e sopraelevandola via via, od in altro modo, sino a che il terreno ceda, e la casa affondi. Se quando avviene questo la reazione del terreno contro la casa fosse eguale e contraria all'azione o pressione della casa sul terreno, le fondamenta resisterebbero, e la casa non affonderebbe, non cadrebbe. E se affonda, ed il terreno cede, gli è perchè il terreno non può contrapporre alla pressione della casa una reazione eguale e contraria. Perchè la reazione del terreno contro la casa è minore dell'azione della casa sul terreno.

Il moto di una massa libera, quando la direzione della forza non coincide con quella dello spostamento. . Il secondo principio fondamentale della meccanica di Galileo e di Newton si verifica non in generale e sempre, ma solo quando la traiettoria è rettilinea, la massa è libera, la direzione della forza coincide con quella dello spostamento del centro di massa del corpo sul quale la forza agisce.

Newton deduce la formola $f = m\,a$ con $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ ammettendo a priori che tutte le volte che la velocità di un corpo va variando per l'azione di una forza, una tal variazione avviene nella direzione della forza.

In altri termini, la velocità la si indichi con v e la forza con f. Newton ammette o presuppone che la variazione piccolissima dv della velocità v in un tempo piccolissimo dt avviene nella direzione della forza f.

Posto ciò, considero la relazione $v = \frac{ds}{dt}$. Dalla quale ho $v\,dt = ds$.

Sò che la velocità v di un corpo è una quantità vettoriale, o vettore. Cioè una quantità o grandezza cui compete non solo un certo valore numerico, ma anche una direzione ed un senso.

Pure ds, in quanto corrisponde ad un segmentino rettilineo od archetto piccolissimo (tanto piccolo da poter confondere l'arco con la corda che lo sottende) che viene percorso in un tempo piccolissimo, è una grandezza vettoriale. Mentre dt è una quantità scalare, o senza direzione.

Se questo è vero, come lo è, l'eguaglianza $v\,dt = ds$ viene a dire e dice che le grandezze vettoriali v e ds formano fra di loro un angolo il cui coseno è eguale ad uno. Per conseguenza un angolo zero. Quindi v e ds hanno la stessa direzione.

Per coloro che non fossero freschi di studio sui vettori e sugli scalari, o non avessero fatto un tale studio, si può dire:

Immagino che un punto materiale si muova comunque nello spazio descrivendo una certa traiettoria o linea per l'azione di una forza f. Ad un certo istante o tempo t, contato a partire dall'inizio del movimento, il punto materiale si trovi nella posizione A della traiettoria. Dopo, ed in un tempuscolo dt, a partire dall'istante t, il punto materiale percorra il tratto piccolissimo ds.

Sia $v = \frac{ds}{dt}$ la velocità del corpo all'istante t. Com'è diretta una tale velocità? Secondo la tangente geometrica alla traiettoria condotta per il punto A, dice l'esperienza.

Ma pure la direzione di ds è quella della tangente geometrica alla traiettoria nel punto A. Perchè tale direzione è quella della retta che congiunge il punto A con un punto estremamente vicino della traiettoria, alla distanza estremamente piccola ed infinitesima ds da A. E la direzione di questa congiungente è quella della tangente alla traiettoria nel punto A.

Posso così dire che i vettori v e ds hanno la stessa direzione. Che questa direzione è quella della tangente geometrica alla traiettoria condotta per il punto A. Che questa direzione è quella dello spostamento del punto materiale, o centro di massa del corpo, preso in esame.

* * *

Del pari posso dire che la direzione dv della variazione della velocità v (vettore) nel tempuscolo dt è eguale a quella del rapporto $\frac{dv}{dt}$, od accelerazione. Perchè dv è un vettore e dt è uno scalare, e facendo il rapporto tra vettore dv e scalare dt si ottiene un nuovo vettore $\frac{dv}{dt}$ (accelerazione) di direzione eguale a quella del vettore dv.

Ed in quanto Newton ammette a priori che la direzione dv della variazione della velocità deve coincidere sempre con quella della forza, posso dire che a detta di Newton l'accelerazione e la forza devono avere la stessa direzione.

* * *

Come fa Newton per dedurre la formola $f = m\,a = m\frac{d^2s}{dt^2}$?

Egli considera dei casi rispetto ai quali anche la direzione della forza coincide con quella dello spostamento. Considera, ad esempio, il caso della caduta verticale e libera dei gravi, rispetto alla quale la forza di gravità e lo spostamento hanno la stessa direzione. Perchè entrambe dirette secondo una verticale.

E per il fatto che Newton presuppone che la direzione della forza coincida con quella della variazione della velocità, e quindi con la direzione dell'accelerazione, posso dire che Newton esamina il caso in cui lo spostamento, la velocità, l'accelerazione, la forza hanno la stessa direzione.

Ed allora, pur avendo il massimo di considerazione e di rispetto, anche di ammirazione, per un Newton; pur ammettendo che Newton non abbia sbagliato, mi chiedo:

Quand'è che debbo ammettere che le conseguenze, o deduzioni, o formule cui Newton perviene devono ritenersi per vere? Quando si verificano i presupposti, o casi stati da Newton esaminati, considerati. Ma non in casi diversi e più complessi, partendo dal presupposto che ciò che ha dedotto un Newton deve ritenersi per generalmente, e sempre, ed assolutamente vero.

Perchè il far questo non è scientifico, ma è invece un ripetere e ricadere nella stessa ragion d'errore in cui sono incorsi Aristotile ed i suoi seguaci, allorchè hanno preteso che la legge di proporzionalità fra spazio e tempo, vera nel caso più semplice del moto uniforme, dovesse ritenersi per vera in generale e sempre; vera, quindi, anche nel caso diverso e più complesso di tutti quei moti che Aristotile chiama naturali.

* * *

E per non sbagliare dico:

E' un errore, o può essere un errore, estendere una legge vera per casi più semplici a casi diversi e più complessi. Per conseguenza una tal legge non dev'essere generalizzata. Ma deve soltanto e può servirmi come spunto, come punto di partenza per trovare la legge relativa a casi diversi e più complessi.

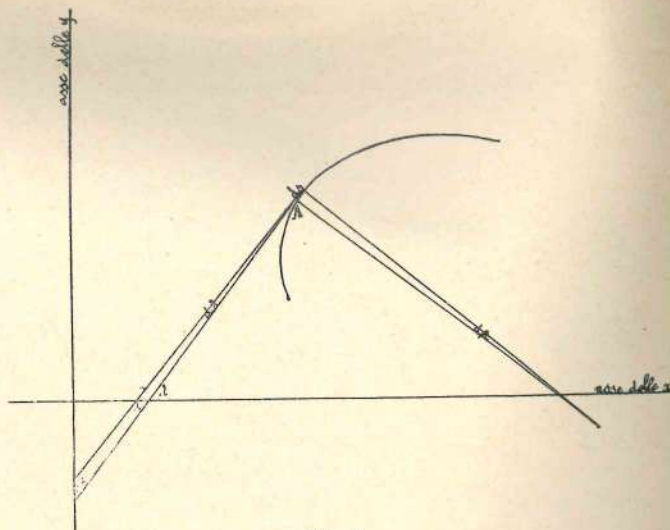



Fig. 1.

Posto questo, immagino che una forza f agisca sopra un punto materiale ecc., e che la direzione della forza non coincida con quella dello spostamento. Per semplificare, suppongo che la traiettoria sia piana.

Riferisco questa traiettoria a due assi cartesiani ortogonali, che rappresento con x e con y, posti nel piano della traiettoria. Indico con

f la forza che agisce sul punto materiale, in corrispondenza del punto A della traiettoria, facendogli percorrere

l'archetto piccolissimo ds di questa nel tempo piccolissimo dt;

X, Y le proiezioni della forza f sui due assi coordinati delle x e delle y, o componenti della forza f secondo questi assi;

dx, dy le componenti o proiezioni dello spostamento ds del centro di massa del corpo, secondo gli assi delle x e delle y;

r il raggio di curvatura nel punto A della traiettoria descritta dal punto materiale mobile;

λ l'angolo che la tangente geometrica alla traiettoria nel punto A fa con l'asse delle x, e μ quello che fa con l'asse delle y. Per essere, e per ipotesi, gli assi ortogonali, si ha $\lambda + \mu = 90°$; $\operatorname{sen}\lambda = \cos\mu$.

Osservo che la componente X della forza f secondo l'asse delle x ha la direzione di quest'asse. E siccome pure il relativo spostamento dx è diretto secondo l'asse delle x, posso dire che nei riguardi della forza X e del corrispondente spostamento dx, la direzione della forza coincide con quella dello spostamento.

Convengo ed ammetto che quando una massa è libera e si verifica questo, e come ha dedotto Newton, debba verificarsi la relazione $f = m\,a$, con $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$.

Per il fatto che nel caso in esame la forza è rappresentata dal simbolo o lettera X e lo spostamento da dx, debbo porre $f = X$; $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Ho così $X = m\frac{d^2x}{dt^2}$.

Del pari ho, rispetto all'asse delle y, $Y = m\frac{d^2y}{dt^2}$.

Osservo che $dx = ds\cos\lambda$; $dy = ds\cos\mu = ds\operatorname{sen}\lambda$;

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos\lambda;\quad \frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt}\operatorname{sen}\lambda.$$

Derivo, ricordando che $d\cos\lambda = -\operatorname{sen}\lambda\,d\lambda$; che $d\operatorname{sen}\lambda = \cos\lambda\,d\lambda$. Viene

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\cos\lambda + \frac{d\cos\lambda}{dt}\frac{ds}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\cos\lambda - \frac{ds}{dt}\frac{d\lambda}{dt}\operatorname{sen}\lambda$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\operatorname{sen}\lambda + \frac{d\operatorname{sen}\lambda}{dt}\frac{ds}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\operatorname{sen}\lambda + \frac{ds}{dt}\frac{d\lambda}{dt}\cos\lambda.$$

Dev'essere ed è poi $ds = r\,d\lambda$. Onde $d\lambda = \frac{ds}{r}$; $\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{r}\frac{ds}{dt}$.

Sostituendo, e ricordando che $\frac{ds}{dt} = v$, viene

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\cos\lambda - \frac{1}{r}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\operatorname{sen}\lambda = \frac{d^2s}{dt^2}\cos\lambda - \frac{v^2}{r}\operatorname{sen}\lambda \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\operatorname{sen}\lambda + \frac{1}{r}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\cos\lambda = \frac{d^2s}{dt^2}\operatorname{sen}\lambda + \frac{v^2}{r}\cos\lambda. \end{cases}$$

Ora X e Y sono due forze componenti perpendicolari fra di loro, perchè dirette secondo gli assi ortogonali delle x e delle y, ed hanno per risultante la forza f. E siccome la risultante di due forze è data dalla diagonale del parallelogrammo costruito sulle forze componenti (che nel caso in esame è un rettangolo), dev'essere $f^2 = X^2 + Y^2$ con

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2};\quad Y = m\frac{d^2y}{dt^2}.\ \text{Onde}$$

$$f^2 = m^2\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + m^2\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 = m^2\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2\right] =$$

$$= m^2\left[\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2\cos^2\lambda - 2\frac{d^2s}{dt^2}\frac{v^2}{r}\operatorname{sen}\lambda\cos\lambda + \frac{v^4}{r^2}\operatorname{sen}^2\lambda + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2\operatorname{sen}^2\lambda + 2\frac{d^2s}{dt^2}\frac{v^2}{r}\operatorname{sen}\lambda\cos\lambda + \frac{v^4}{r^2}\cos^2\lambda\right] =$$

$$= m^2\left[\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2(\operatorname{sen}^2\lambda + \cos^2\lambda) + \frac{v^4}{r^2}(\operatorname{sen}^2\lambda + \cos^2\lambda)\right] =$$

$$= m^2\left[\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}\right]$$

Ed anche, per avere posto $\frac{d^2s}{dt^2} = a$:

$$f^2 = m^2\left(a + \frac{v^4}{r^2}\right);\quad f = m\sqrt{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}} = m\sqrt{a^2 + \frac{v^4}{r^2}}.$$

E non già $f = m\,a$, come dovrebbe essere se il secondo principio della meccanica Newtoniana fosse generalmente e sempre vero.

* * *

Passo a vedere che cosa rappresentano le grandezze sotto il segno di radicale.

Suppongo ancora che ad un certo istante t il centro di massa del corpo occupi la posizione qualsiasi A. Decompongo la forza f che agisce sul corpo, e la cui direzione non coincide, per ipotesi, con quella dello spostamento o tangente alla traiettoria, in due componenti, rispettivamente secondo la tangente geometrica alla traiettoria nel punto A e secondo la normale a questa tangente. Pure tali componenti sono perpendicolari fra di loro, al pari delle X e delle Y.

Indico con f_τ la componente tangenziale e con a_τ la corrispondente accelerazione, od accelerazione secondo lo spostamento del centro di massa del corpo; con f_n la componente normale alla traiettoria e con a_n l'accelerazione relativa.

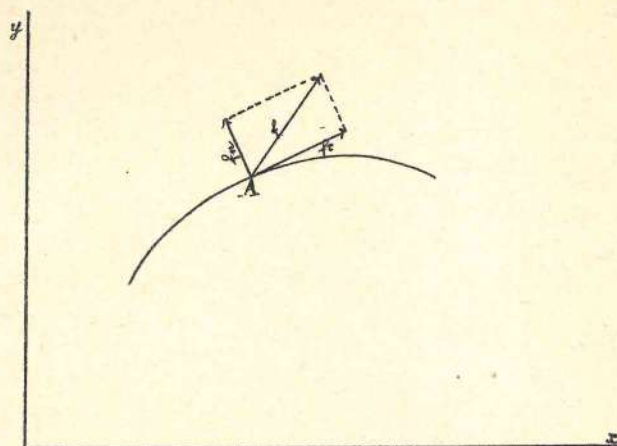



Fig. 2.

Posso dire che la forza f corrisponde all'ipotenusa di un triangolo rettangolo avendo per cateti f_τ e f_n. Che quindi $f^2 = f^2_\tau + f^2_n$.

Dev'essere poi $f_\tau = m\,a_\tau$; $f_n = m\,a_n$. Onde $f^2 = m^2 a^2_\tau + m^2 a^2_n = m^2(a^2_\tau + a^2_n)$. Od anche $f^2_\tau + f^2_n = m^2\,(a^2_\tau + a^2_n)$.

Per determinare l'accelerazione tangenziale a_τ debbo immaginare che per un tempo piccolissimo dt agisca soltanto la forza o componente tangenziale f_τ. Che quindi l'altra componente f_n sia zero.

Del pari ottengo l'accelerazione normale a_n alla traiet

toria immaginando che agisca soltanto, nel tempuscolo dt, la componente o forza normale f_n.

* * *

Posto ciò, suppongo che agisca soltanto la forza tangenziale f_τ. Questa forza viene ad essere ed è diretta secondo la tangente alla traiettoria, secondo la direzione dello spostamento. Perciò deve verificarsi la relazione $f_\tau = m\,a$ con $a = \frac{d^2s}{dt^2}$. E siccome dev'essere pure $f_\tau = m\,a_\tau$, ho $a_\tau = \frac{d^2s}{dt^2}$.

Al quale risultato posso anche giungere ragionando così:

Se la forza f_τ agisce secondo la tangente alla traiettoria, ed agisce essa soltanto, la traiettoria relativa dev'essere necessariamente rettilinea. Perchè il moto del corpo, a tale forza corrispondente, non può essere che quello diretto secondo la tangente geometrica alla traiettoria condotta per il punto A.

Se la traiettoria relativa alla forza f_τ è rettilinea, il valore dell'angolo λ che la tangente alla traiettoria fà con l'asse delle x è costante. Perciò se indico con v_τ la velocità relativa alla componente o forza tangenziale f_τ, con $\frac{dx_\tau}{dt}$, $\frac{dy_\tau}{dt}$ le sue proiezioni sugli assi delle x e delle y (o componenti secondo x ed y), deve risultare $\frac{dx_\tau}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos\lambda$; $\frac{dy_\tau}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\text{sen}\,\lambda$, essendo λ = costante. E quindi $\cos\lambda$ = costante; $\text{sen}\,\lambda$ = costante.

Differenziando viene $\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\cos\lambda$; $\frac{d^2y_\tau}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\,\text{sen}\,\lambda$.

Ora $\frac{d^2x_\tau}{dt^2}$ e $\frac{d^2y_\tau}{dt^2}$ sono le proiezioni o componenti dell'accelerazione a_τ sugli assi delle x e delle y. Perciò dev'essere, per la ortogonalità degli assi, $a^2_\tau = \left(\frac{d^2x_\tau}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y_\tau}{dt^2}\right)^2$.

Onde, sostituendo, ecc.

$$a^2_\tau = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 \cos^2\lambda + \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 \text{sen}^2\,\lambda = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 \times$$

$$\times\ (\text{sen}^2\,\lambda + \cos^2\lambda) = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2;\quad a_\tau = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

E questo risultato mi dice che:

L'accelerazione $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ che per l'addietro si è convenuto di rappresentare col simbolo a, è diretta secondo la tangente alla traiettoria che viene percorsa dal centro della massa sulla quale la forza agisce. E si ha, in generale,

$$a_\tau = \frac{d^2s}{dt^2} = a.$$

* * *

Passo a determinare l'accelerazione normale alla traiettoria.

Per avere questa accelerazione debbo immaginare che la componente o forza tangenziale f_τ si riduca a zero. Se questa forza fosse zero dovrebbe essere zero la relativa accelerazione a_τ. E siccome $a_\tau = \frac{d^2s}{dt^2}$, dovrebbe risultare $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$; $\frac{ds}{dt}$ = Costante.

Posso pertanto dire che se si contraddistingue col pedice n la velocità relativa alla componente normale, deve essere $\frac{dx_n}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos\lambda$; $\frac{dy_n}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\text{sen}\,\lambda$, con $\frac{ds}{dt}$ costante.

Onde

$$\frac{d^2x_n}{dt^2} = -\frac{ds}{dt}\frac{d\lambda}{dt}\,\text{sen}\,\lambda = -\frac{1}{r}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \text{sen}\,\lambda = -\frac{v^2}{r}\,\text{sen}\,\lambda;$$

$$\frac{d^2y_n}{dt^2} = \frac{ds}{dt}\frac{d\lambda}{dt}\cos\lambda = \frac{1}{r}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cos\lambda = \frac{v^2}{r}\cos\lambda$$

Inoltre dev'essere $a^2_n = \left(\frac{d^2x_n}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y_n}{dt^2}\right)^2$. Perciò

$$a^2_n = \frac{v^4}{r^2}\,\text{sen}^2\,\lambda + \frac{v^4}{r^2}\cos^2\lambda = \frac{v^4}{r^2}(\text{sen}^2\,\lambda + \cos^2\lambda) = \frac{v^4}{r^2};\quad a_n = \frac{v^2}{r}.$$

$$f^2 = f^2_\tau + f^2_n = m^2\,(a^2_\tau = a^2_n) = m^2\left(a^2 + \frac{v^4}{r^2}\right);\quad f = m\sqrt{a^2_\tau + a^2_n} =$$

$$= m\sqrt{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}} = m\sqrt{a^2 + \frac{v^4}{r^2}}.$$

* * *

Gli stessi risultati si possono poi ottenere anche nel caso più complesso in cui la traiettoria non è piana. E', cioè, sghemba.

In questo caso si può dire:

Sia A B = ds un archetto piccolissimo che il punto materiale mobile (corrispondente al centro di massa del corpo) descrive in un tempo piccolissimo dt. Indico con O l'origine di tre assi cartesiani ortogonali. Dal punto O conduco una parallela alla tangente geometrica alla traiettoria nel punto A. Sia A' il punto in cui questa retta incontra una sfera di raggio uno e di centro O.

Del pari tiro da O una parallela alla tangente alla traiettoria nel punto B ed indico con B' il suo punto di incontro con la sfera di raggio uno, ecc.

I punti A' e B' appartengono, come si sa, ad una linea che chiamasi la immagine sferica della curva sghemba che si considera.

Rappresento con ds' l'archetto piccolissimo A' B' della immagine sferica, cioè pongo archetto A' B' = ds'. Questo archetto dà la misura o valore dell'angolo piccolissimo che formano fra di loro i raggi di curvatura della linea sghemba nei punti A e B. Difatti, quest'angolo è eguale a quello che formano fra di loro le due parallele condotte per O alle tangenti alla curva nei punti A e B, perchè le tangenti in A ed in B sono perpendicolari ai raggi di curvatura relativi agli stessi punti. Si ha così, con grandissima approssimazione, ds = r ds'.

Siano x', y', z' le coordinate del punto A' della immagine sferica rispetto ai tre assi coordinati. Per il fatto che OA' = 1 (per essere uno il raggio della sfera), la coordinata x' è eguale al coseno dell'angolo che il raggio vettore OA' fà con l'asse delle x. Ma OA' è parallela alla tangente geometrica alla curva nel punto A. Quindi se si

indica con λ l'angolo che tale tangente fà con l'asse delle x si ha x' = cos λ.

Analogamente, indico con μ e con ν agli angoli che la tangente in A alla curva fà con gli assi delle y e delle z. Ho y' = cos μ; z' = cos ν.

Ho poi, indicando con dx, dy, dz le componenti dell'archetto A B = ds, rispetto ai tre assi coordinati, dx = ds cos λ; dy = ds cos μ; dz = ds cos ν;

$$\cos\lambda = \frac{dx}{ds} = x'; \quad \cos\mu = \frac{dy}{ds} = y'; \quad \cos\nu = \frac{dz}{ds} = z'.$$

Conduco per il punto A' la tangente geometrica alla immagine sferica. Questa tangente è parallela alla normale principale alla curva nel punto A. Rappresento con λ', μ', ν' gli angoli che tale tangente all'immagine sferica fà con gli assi coordinati. Posso allora dire che gli angoli λ', μ', ν' sono eguali a quelli che la normale principale alla curva in A fa con gli stessi assi. Ed ottengo, ricordando che ds = r ds':

$$dx' = d\cos\lambda = ds'\cos\lambda' = \frac{ds}{r}\cos\lambda';$$

$$dy' = d\cos\mu = ds'\cos\mu' = \frac{ds}{r}\cos\mu'; \quad dz' = d\cos\nu = ds'\cos\nu' = \frac{ds}{r}\cos\nu'; \quad \frac{d\cos\lambda}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{\cos\lambda'}{r}; \quad \frac{d\cos\mu}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{\cos\mu'}{r};$$

$$\frac{d\cos\nu}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{\cos\nu'}{r}.$$

Per la relazione dx = ds cos λ ho poi $\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos\lambda$;

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\cos\lambda + \frac{d\cos\lambda}{dt}\frac{ds}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\cos\lambda + \frac{ds}{dt}\frac{\cos\lambda'}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\cos\lambda + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{\cos\lambda'}{r}.$$

E sostituendo a $\frac{ds}{dt}$ il suo valore v, $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\cos\lambda + \frac{v^2}{r}\cos\lambda'$.

Analogamente si ottiene

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\cos\mu + \frac{v^2}{r}\cos\mu'; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\cos\nu + \frac{v^2}{r}\cos\nu'.$$

Indico con X, Y, Z le componenti o proiezioni della forza f secondo i tre assi coordinati. Nei riguardi di questa forza, e dei relativi spostamenti secondo gli assi delle x, delle y, delle z, la direzione della forza coincide con quella dello spostamento. Perciò dev'essere:

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\left(\frac{d^2s}{dt^2}\cos\lambda + \frac{v^2}{r}\cos\lambda'\right);$$

$$Y = m\frac{d^2y}{dt^2} = m\left(\frac{d^2s}{dt^2}\cos\mu + \frac{v^2}{r}\cos\mu'\right);$$

$$Z = m\frac{d^2z}{dt^2} = m\left(\frac{d^2s}{dt^2}\cos\nu + \frac{v^2}{r}\cos\nu'\right);$$

$$f^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = m^2\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2\right] =$$

$$= m^2\left[\left(\frac{d^2s}{dt^2}\cos\lambda + \frac{v^2}{r}\cos\lambda'\right)^2 + \left(\frac{d^2s}{dt^2}\cos\mu + \frac{v^2}{r}\cos\mu'\right)^2 + \left(\frac{d^2s}{dt^2}\cos\nu + \frac{v^2}{r}\cos\nu'\right)^2\right] = m^2\left[\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 \times\right.$$

$$\times (\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu) + \frac{v^4}{r^2}(\cos^2\lambda' + \cos^2\mu' + \cos^2\nu') +$$

$$\left. + 2\frac{v^2}{r}\frac{d^2s}{dt^2}(\cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu')\right].$$

Ora $\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$; $\cos^2\lambda' + \cos^2\mu' + \cos^2\nu' = 1$; $\cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu' = 0$, perchè la tangente e la normale principale alla curva nel punto A sono perpendicolari fra di loro. Viene così

$$f^2 = m^2\left[\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}\right] = m^2\left(a^2 + \frac{v^4}{r^2}\right);$$

$$f = m^2\sqrt{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}} = m\sqrt{a^2 + \frac{v^4}{r^2}}.$$

In modo analogo trovo che se si immagina di decomporre la forza f secondo due componenti rispettivamente nella direzione della tangente alla curva in A e della normale principale nello stesso punto, e si indicano con f_τ, f_n le forze componenti, con a_τ, a_n le corrispondenti accelerazioni, dev'essere $f_\tau = m a_\tau = m a = m\frac{d^2s}{dt^2}$; $f_n = m a_n = m\frac{v^2}{r}$.

* * *

Questi risultati, ed i ragionamenti che ad essi conducono sono poi confermati dall'esperienza. Si consideri, ad esempio, il ragionamento fatto per dedurre l'accelerazione normale a_n alla traiettoria e la relativa forza f_n.

Immagino che un punto materiale descriva periodicamente una circonferenza di raggio r con velocità costante ed impiegando, conseguentemente, un tempo T costante a fare un giro intero. Questo tempo T chiamasi periodo. Il punto mobile percorre lo spazio s = 2πr nel tempo T costante.

Ho perciò $v = \frac{2\pi r}{T}$ con r e T costante. Quindi $v = \frac{ds}{dt} =$

$$= \text{Cost.}; \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a = 0.$$

Si è detto ed ammesso che questa relazione è quella che deve corrispondere al caso in cui la componente tangenziale f_τ non agisce, ed agisce la sola componente normale f_n. Perciò l'accelerazione che si ottiene dev'essere la a_n. E deve risultare $a_n = \frac{v^2}{r}$; $f_n = m\frac{v^2}{r}$.

E queste relazioni, come si sà, sono state e sono confermate dall'esperienza. La quale ha detto e dice che nel

caso di un moto circolare ed uniforme l'accelerazione $a_n = \frac{v^2}{r}$ e la corrispondente forza $f_n = m \frac{v^2}{r}$ sono normali alla traiettoria. Come dev'essere secondo la teoria esposta.

Si ha poi, per la relazione $v = \frac{2\pi r}{T}$ del moto circolare uniforme: $a = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$; $f_n = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$.

E pure questi risultati sono conformi a quelli che la esperienza ha dato e dà.

* * *

Da parte di Eulero, di Huyghens e d'altri è stato detto:

Si indichi con a l'accelerazione di un punto materiale. Si trova, come si è visto, che una tale accelerazione è la risultante di due accelerazioni componenti ad angolo retto, e dirette secondo la tangente e la normale alla traiettoria che descrive il punto materiale. Quindi se si indica con a_τ l'accelerazione secondo la tangente, con a_n quella secondo la normale alla traiettoria, si ha $a^2 = a^2_\tau + a^2_n$.

E questa relazione è nota col nome di equazione di Eulero.

Ora il simbolo a_τ rappresenta ed è l'accelerazione $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$, cioè quella accelerazione che si suol rappresentare col simbolo a. Perciò si viene a commettere l'errore o giochetto di rappresentare una stessa grandezza con due simboli diversi, come se si trattasse di grandezze diverse.

Per contro il primo membro dell'equazione $a^2 = a^2_\tau + a^2_n$ non rappresenta e non è l'accelerazione $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ che si conviene di rappresentare con la lettera a. Ma l'accelerazione diversa a_f, se con a_f si rappresenta l'accelerazione nella direzione della forza f. E così si commette l'errore di rappresentare due grandezze diverse con lo stesso simbolo, come se si trattasse di una stessa ed unica grandezza.

* * *

Il giochetto lo si è poi ripetuto sotto forme diverse (1).

E ciò è stato fatto per non ammettere la non generale vê-

———

con due simboli diversi, a seconda che la fà corrispondere

Fig. 3.

a $\frac{ds}{dt}$ oppure a $\frac{d\bar{\rho}}{dt}$. Precisamente pone $\frac{ds}{dt} = v$; $\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \bar{v}$.

Queste relazioni non sono generalmente vere, perchè a grandezze eguali devonsi far corrispondere simboli eguali. Ed è soltanto quando due grandezze sono diverse che si devono rappresentare con simboli diversi. Ad ogni modo si ottiene, per mezzo di questo giochetto, e come si legge nelle « Lezioni di meccanica razionale » del Prof. G. Morera, R. Università di Torino, anno scolastico 1901-1902, pagg. 45 e 46:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}}{ds}\,\frac{ds}{dt} = v\,\frac{d\bar{\rho}}{ds}.$$

Nei riguardi di questa relazione devesi aver presente, per chi segue il vero raziocinio, che non si deve mai obliare o perdere di vista la ipotesi o relazione di partenza. Se questa relazione è la $ds = d\bar{\rho}$ si ottiene $\frac{d\bar{\rho}}{ds} = 1$. E quindi

$$\bar{v} = v\,\frac{d\bar{\rho}}{ds} = v \times 1 = v.$$

Invece il Prof. Morera dice, alle pagg. 140 e 141:

Detto $\bar{a}$ il vettore accelerazione e detto $\bar{\rho}$ il raggio vettore che da un polo fisso và al punto mobile, si ha, per definizione,

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{\rho}}{dt^2} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v\,\frac{d\bar{\rho}}{ds}\right) = \frac{d\bar{\rho}}{ds}\,\frac{dv}{dt} + v\,\frac{d^2\bar{\rho}}{ds^2}\,\frac{ds}{dt}.$$

Ora, dice sempre il Prof. Morera, $\frac{ds}{dt} = v$. Quindi $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$. E sostituendo, $\bar{a} = \frac{d\bar{\rho}}{ds}\,\frac{d^2s}{dt^2} + v^2\,\frac{d^2\bar{\rho}}{ds^2}$.

Giunti a questo punto si dice:

Siccome $d\bar{\rho} = ds$, si può dire che $\frac{d\bar{\rho}}{ds} = 1$. E l'espressione $\frac{d\bar{\rho}}{ds}\,\frac{d^2s}{dt^2}$ si semplifica nella $\frac{d^2s}{dt^2}$, cioè nella accelera-

———

(1) Ad esempio, nel trattato di meccanica razionale del prof. Giacinto Morera, e relativo al corso che questi svolgeva all'Università di Torino, allorchè l'autore di quest'opera era studente, si dice:

Un punto materiale descriva una linea s qualunque. Si riferisca la linea, o meglio, il movimento del punto materiale lungo di essa, ad un sistema di assi cartesiani. Siano O l'origine degli assi; A un punto qualunque della linea; ρ il raggio vettore O A che và dall'origine O al punto mobile A.

Se il raggio vettore ρ lo si considera come un vettore, e si indica con $\bar{\rho}$ questo vettore, si può osservare che lo spazio ds che viene percorso in un tempuscolo dt è equivalente alla variazione $d\bar{\rho}$ del vettore $\bar{\rho}$. Quindi si ha

$$ds = d\bar{\rho}; \qquad \frac{ds}{dt} = v = \frac{d\bar{\rho}}{dt}.$$

Il Prof. Morera rappresenta poi la stessa grandezza v

ridicità della formola $f = m\,a$ che esprime il secondo principio fondamentale della meccanica di Galileo e di Newton.

Ma in verità devesi dire che la formola $f = m\,a$, esprimente un tale principio, è vera non in generale e sempre, ma solo nel caso particolare in cui la traiettoria è rettilinea. Perchè è solo in questo caso che la direzione della forza coincide con quella dello spostamento. Come ammette e presuppone Newton.

Difatti, considero il caso più semplice in cui la traiettoria è piana. Vedo se è confermato, in generale e sempre, il secondo principio della meccanica Newtoniana, espresso dalla relazione $f = m\,a = m\,\frac{dv}{dt} = m\,\frac{d^2s}{dt^2}$. Indico con X e con Y le componenti, secondo due assi coordinati ortogonali, della forza f. Dovrebbe risultare

$$f^2 = m^2 \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 = X^2 + Y^2; \quad X = m\,\frac{d^2x}{dt^2}; \quad Y = m\,\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Elevo a quadrato. Ho

$$X^2 = m^2 \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 ;; \quad Y^2 = m^2 \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 ; \quad X^2 + Y^2 =$$

---

zione tangenziale. Quanto alla espressione $v^2\,\frac{d^2\bar{\rho}}{ds^2}$ si può osservare, dice sempre il Prof. Morera (a pag. 19) che se dal punto O si spicca un raggio vettore O N eguale a $\frac{d\bar{\rho}}{ds}$ nella direzione della tangente alla traiettoria nel punto A, il termine N del raggio vettore O N genera una curva che si chiama l'indicatrice od immagine sferica della linea descritta dal mobile. Sia $d\sigma$ l'archetto della immagine sferica corrispondente all'archetto ds della curva. Viene

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\,\frac{d\bar{\rho}}{ds}}{ds} = \frac{\frac{d^2\bar{\rho}}{ds^2}\,ds}{ds} = \frac{d^2\bar{\rho}}{ds^2}.$$

Si indichi ancora con ρ il raggio di curvatura della linea s nel punto A di questa (il che non si può fare, avendo già convenuto di rappresentare con ρ il raggio vettore). Allora, si dice nel corso di meccanica razionale del Prof. Morera, $\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{\rho}$. E si ottiene $\bar{a} = \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{v^2}{\rho}$.

Ma questa è roba da chiodi, io ho detto sino da studente. Se $d\bar{\rho} = ds$, se $\frac{d\bar{\rho}}{ds} = 1 = \text{Cost.}$, si ha senz'altro $\frac{d^2\bar{\rho}}{ds^2} = 0$. E quindi si ottiene $\bar{a} = \frac{d^2s}{dt^2}$ = accelerazione tangenziale.

Per avere l'immagine od indicatrice sferica della curva devonsi condurre da un punto O delle parallele alle tangenti geometriche alla curva e di lunghezza eguale ad uno. Precisamente, dal punto O si tiri una parallela alla tangente alla curva nel punto A. Sia A' il punto in cui tale parallela incontra la sfera di centro O e raggio uno. Il punto A' appartiene alla immagine sferica, ecc.

Il Prof. Morera dice, invece, che il vettore condotto dal punto O ecc. dev'essere di lunghezza eguale a $\frac{d\bar{\rho}}{ds}$. Per il fatto, però, che $d\bar{\rho} = ds$, si ha $\frac{d\bar{\rho}}{ds} = 1$. E si può dire, come dice il Prof. Morera, che la curva che si ottiene è l'immagine sferica.

Ma una cosa è allora da rilevarsi. Ed è che se si indica con $d\sigma$ un archetto della immagine sferica non è vero il dire, come dice il Prof. Morera, che $d\sigma = d\,\frac{d\bar{\rho}}{ds} = \frac{d^2\bar{\rho}}{ds^2}\,ds$, giacchè si otterrebbe $\frac{d^2\bar{\rho}}{ds^2} = 0$; $d\sigma = 0$.

Il che è vero soltanto quando la traiettoria è una retta. E non è vero tutte le volte che la traiettoria non è rettilinea. Ed è una curva qualunque.

Un altro errore è poi questo. Sia $d\sigma$ l'archetto della immagine sferica che corrisponde all'archetto ds della curva, e sia r il raggio di curvatura nel punto A. Dev'essere $ds = r\,d\sigma$; $\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{r}$, dove il raggio di curvatura r può essere ben diverso dal raggio vettore ρ che và dall'origine delle coordinate ad un punto della curva. E dove l'origine delle coordinate è un punto che si può scegliere a piacere, ed è quindi un punto qualunque. Rispetto ad un punto A della curva il raggio di curvatura ha un dato valore, mentre i valori di ρ variano col variare dell'origine O delle coordinate. E siccome due grandezze diverse devono essere rappresentate con simboli diversi, così non è lecito di rappresentare con uno stesso simbolo tanto il raggio vettore ρ che il raggio di curvatura. E questo errore merita di essere rilevato anche perchè trovasi in quasi tutti i trattati di meccanica, nei riguardi della deduzione del principio detto delle aree e della sua applicazione al moto dei pianeti.

Ad ogni modo, se è vero che $d\bar{\rho} = ds$, che $\frac{d\bar{\rho}}{ds} = 1 = \text{Cost.}$, è necessariamente e pur vero il dire che $\frac{d^2\bar{\rho}}{ds^2} = 0$.

Perciò la relazione $\bar{a} = \frac{d\bar{\rho}}{ds}\,\frac{d^2s}{dt^2} + v^2\,\frac{d^2\bar{\rho}}{ds^2}$ si semplifica nella $\bar{a} = \frac{d^2s}{dt^2}$.

Se $\bar{a}$ rappresentasse l'accelerazione totale e risultante dovuta all'azione della forza f, e per il fatto che questa accelerazione è data da

$$\sqrt{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2}, \text{ si otterrebbe}$$

$$\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2; \quad \left(\frac{v^2}{r}\right)^2 = 0; \quad \frac{v^2}{r} = 0.$$

Il che è vero non già in generale e sempre, ma soltanto quando la traiettoria è rettilinea.

$$= m^2 \left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 \right]$$

Per la relazione $X^2+Y^2=f^2=m^2\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2$, data dal secondo principio della meccanica di Galileo e di Newton, ho, sostituendo,

$$m^2\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 = m^2\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2\right]; \quad \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 = $$

$$= \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2.$$

Si è visto che nel caso di una traiettoria piana deve risultare $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\cos\lambda - \frac{v^2}{r}\operatorname{sen}\lambda$;

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\operatorname{sen}\lambda + \frac{v^2}{r}\cos\lambda.$$

E sostituendo ancora:

$$\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\cos\lambda - \frac{v^2}{r}\operatorname{sen}\lambda\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{d^2s}{dt^2}\operatorname{sen}\lambda + \frac{v^2}{r}\cos\lambda\right)^2 = \ldots =$$

$$= \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 (\operatorname{sen}^2\lambda + \cos^2\lambda) + \frac{v^4}{r^2}(\operatorname{sen}^2\lambda + \cos^2\lambda) =$$

$$= \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}.$$

Ottengo così il risultato

$$\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}; \quad \left(\frac{v^2}{r}\right)^2 = o; \quad \frac{v^2}{r} = o.$$

La quale ultima relazione è soddisfatta soltanto quando il raggio di curvatura è infinito, quando la traiettoria è rettilinea. Ma non è vera tutte le volte che v ed r sono diversi da zero ed hanno valori finiti.

Lo stesso risultato lo si ha nel caso di una traiettoria sghemba, o non piana.

Invero, se il secondo principio della meccanica Newtoniana fosse generalmente e sempre esatto, dovrebbe risultare, indicando con X, Y, Z, le componenti della forza f secondo tre assi coordinati ortogonali:

$$f = m\frac{d^2s}{dt^2}; \quad X = m\frac{d^2x}{dt^2}; \quad Y = m\frac{d^2y}{dt^2}; \quad Z = m\frac{d^2z}{dt^2};$$

$$f^2 = m^2\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 = X^2+Y^2+Z^2 = m^2\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2\right]; \quad \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2$$

Si è visto che:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\cos\lambda + \frac{v^2}{r}\cos\lambda';$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\cos\mu + \frac{v^2}{r}\cos\mu';$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\cos\nu + \frac{v^2}{r}\cos\nu'.$$

Sostituisco ed ottengo:

$$\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\cos\lambda + \frac{v^2}{r}\cos\lambda'\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{d^2s}{dt^2}\cos\mu + \frac{v^2}{r}\cos\mu'\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{d^2s}{dt^2}\cos\nu + \frac{v^2}{r}\cos\nu'\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 (\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu) + \frac{v^4}{r^2} \times$$

$$\times (\cos^2\lambda' + \cos^2\mu' + \cos^2\nu') +$$

$$2\frac{v^2}{r}\frac{d^2s}{dt^2}(\cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu') =$$

$$= \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}.$$

Ed ho così

$$\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}; \quad \frac{v^4}{r^2} = \left(\frac{v^2}{r}\right)^2 = o; \quad \frac{v^2}{r} = o$$

Il che è vero nel caso di $r = \infty$, nel caso in cui la traiettoria è rettilinea. Ma non è vero tutte le volte che v ed r sono diversi da zero ed hanno valori finiti.

* * *

E' inoltre da rilevarsi che quando risulta $\frac{v^2}{r} = o$, ed in quanto $\frac{v^2}{r}$ è l'accelerazione normale alla traiettoria, questa accelerazione è zero. Per conseguenza è zero la componente normale alla traiettoria. E non resta così, come forza agente sul corpo, che la componente o forza tangenziale.

Siccome questa è diretta nel senso del movimento, si può dire che la direzione della forza coincide con quella dello spostamento del centro di massa del corpo sul quale la forza agisce.

E dire che il secondo principio fondamentale della meccanica di Galileo e di Newton si verifica non in generale, ma solo nel caso in cui la traiettoria è rettilinea, la massa è libera, la direzione della forza è eguale a quella dello spostamento.

Ancora della erroneità del secondo principio della meccanica di Newton nel caso di una massa libera, non vincolata ad assi o centri di rotazione rigidi e fissi, e quando la direzione della forza non coincide con quella dello spostamento.

Nel precedente studio si è ammesso che nei riguardi delle forze è lecito di applicare il principio o legge del parallelogrammo. Che per conseguenza se si immagina di decomporre una forza f in due componenti ad angolo retto fra di loro, o se due forze componenti sono fra di loro normali (come può dirsi delle componenti tangenziale e normale ad una traiettoria in un punto A di questa), la forza risultante è data dalla diagonale del rettangolo costruito sulle forze componenti.

Il far questo è conforme al vero e quindi lecito. Difatti, suppongo di ricorrere all'esperienza, di considerare due forze componenti e perpendicolari l'una all'altra, di determinare sperimentalmente la forza risultante. Trovo che questa corrisponde alla diagonale del rettangolo avente per due lati consecutivi le forze componenti.

Lo stesso si può dire, e come si sà, per due spostamenti componenti. Nei riguardi dei quali si può dedurre per mezzo

del raziocinio che lo spostamento risultante è dato dal principio del parallelogrammo. Il quale si trasforma in un rettangolo tutte le volte che gli spostamenti componenti sono fra di loro normali. E l'esperienza dice che ciò è vero.

* * *

Ad esempio, sia A B C D un recipiente di forma cilindrica, pieno d'acqua, e le cui pareti A D e B C siano verticalmente disposte. In A si abbia un orifizio orizzontale.

Apro l'orifizio e fò sgorgare l'acqua da A lungo un ca-

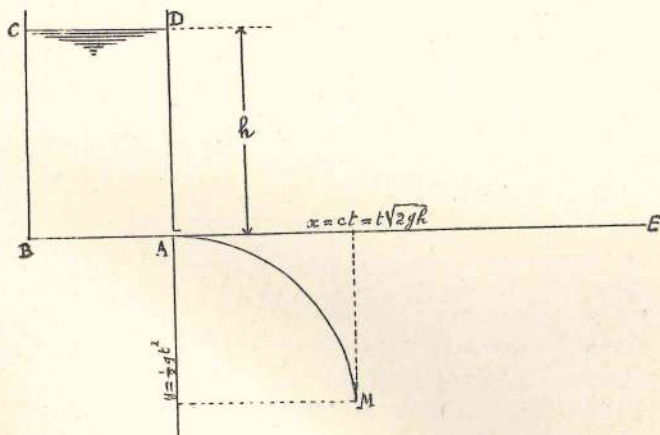



Fig. 4.

nale A E disposto pure orizzontalmente. Trovo, con grandissima approssimazione, che l'acqua esce da A con la stessa velocità cui perverrebbe cadendo verticalmente per un'altezza eguale al dislivello o distanza fra l'orifizio ed il livello superiore del liquido.

Indico questa distanza o dislivello con la lettera h. Posso allora dire, per il teorema di Torricelli, che durante la fuoruscita dell'acqua questa ha, uscendo da A, una velocità diretta orizzontalmente, data dalla relazione $h = \frac{1}{2} gt^2$ con $gt = v$, ed essendo g l'accelerazione della gravità. Onde

$$h = \frac{1}{2} \frac{g^2t^2}{g} = \frac{v^2}{2g}; \quad v^2 = 2gh; \quad v = \sqrt{2gh}.$$

Sia x la distanza cui l'acqua perverrebbe lungo il canale orizzontale A E, a partire da A e dopo un certo tempo t contato a partire dall'istante in cui si trovava in corrispondenza dell'orifizio A.

Nel caso di resistenze al moto trascurabili, trovo che $x = vt = \sqrt{2gh} \times t$.

Tolgo ora il canale orizzontale A E, riempio di nuovo il recipiente, ed anzi rifornisco via via l'acqua per modo che il suo livello superiore rimanga costante. Fò poi cadere ancora l'acqua dall'orifizio A, ma liberamente.

Adesso l'acqua scende o cade per l'azione della forza di gravità o peso che ha. Se non esistesse la velocità v, se cadesse verticalmente senza velocità iniziale ed a partire da A, essa percorrerebbe, nel tempo t, una distanza y in senso verticale data da $y = \frac{1}{2} gt^2$. Ma l'acqua esce da A con la velocità $v = \sqrt{2gh}$ diretta in senso orizzontale. E se è vero che gli spostamenti vanno soggetti al principio del parallelogrammo (nel caso in esame un rettangolo), essa deve trovarsi al tempo t in un punto M dato dalla diagonale del rettangolo che ha i lati eguali a $x = \sqrt{2gh} \times t$ e $y = \frac{1}{2} gt^2$.

Si ottiene, così facendo e come si sà, che la traiettoria è una parabola. E se questa traiettoria viene prima determinata col calcolo e fissata graficamente, e poi si fà effluire l'acqua da A, si trova che la traiettoria che l'acqua descrive è, con grandissima approssimazione, proprio quella data dal calcolo e dal ragionamento sopra fatto. Onde posso dire e dico che l'esperienza conferma che lo spostamento risultante di due spostamenti componenti è dato dal principio del parallelogrammo. (1)

* * *

Dal fatto che l'esperienza mi dice, nel caso dianzi esaminato, che nei riguardi di due forze o di due spostamenti componenti il principio del parallelogrammo è vero, posso io inferire senz'altro che deve ritenersi per vero anche nei riguardi di due velocità e di due accelerazioni? Come è stato fatto e si fà, e come fà Newton con l'enunciazione della seconda legge della sua meccanica? Dicendo che in virtù di questa legge la direzione dell'accelerazione dev'essere sempre eguale a quella della forza, e nello stesso senso? Che per conseguenza se il principio del parallelogrammo è vero per le forze lo dev'essere anche per le accelerazioni?

Si, debbo dire, se partendo da risultati, o fatti, o verità che mi sono rivelate dall'esperienza, trovo delle conseguenze che mi portano a dire di si. No, se queste conseguenze mi portano a dire di no.

Ma non già dire sì o no a priori, perchè pare al mio pensiero che si debba dire di sì. O mi comoda o piace dire di si.

Ed allora dico:

Ammetto che nei riguardi di due spostamenti componenti si verifichi il principio del parallelogrammo, equivalente ad un noto principio di Galileo detto della indipendente coesistenza di più movimenti in un corpo. E di ammettere ciò perchè l'esperienza mi dice che ciò è vero. Almeno nel caso preso in esame.

I due spostamenti componenti siano rappresentati da un moto uniforme od a velocità costante lungo un asse orizzontale o delle x, e da un moto uniformemente accelerato lungo l'asse verticale o delle y. Più precisamente, si abbia $x = ct = \sqrt{2gh} \times t$ con $c = \sqrt{2gh} = \text{cost}$; $y = \frac{1}{2} gt^2$.

Differenziando viene $dx = c\,dt = \sqrt{2gh} \times dt$; $dy = gt\,dt$.

Sia ds lo spostamento risultante, o spostamento effettivo lungo la traiettoria (che nel caso di resistenze trascurabili (2) ed in esame è una parabola). Dev'essere, per il principio del parallelogrammo (rettangolo nel caso in esame) applicato ai due spostamenti componenti dx e dy:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = c^2\,dt^2 + g^2\,t^2\,dt^2 = (c^2 + g^2\,t^2)\,dt^2;$$

$$ds = \sqrt{c^2 + g^2t^2} \times dt.$$

Od anche, per essere $c = \sqrt{2gh}$, $ds = \sqrt{2gh + g^2t^2} \times dt$.

Se c è costante per ipotesi dev'essere necessariamente, ed in virtù della eguaglianza $c = \sqrt{2gh}$ con g costante, pure costante h. Essendo h il dislivello o distanza fra l'orifizio A ed il livello superiore del liquido.

Ho così:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{c^2 + g^2t^2} = \sqrt{2gh + g^2t^2}; \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{2} (c^2 + g^2t^2)^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times 2g^2t = \frac{g^2t}{\sqrt{c^2 + g^2t^2}} = \frac{g^2t}{\sqrt{2gh + g^2t^2}}$$

* * *

Passo a vedere se è vero, nel caso in esame, quel che dice Newton con la seconda legge della sua meccanica. Se è vero, cioè, che l'accelerazione $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2t}{\sqrt{2gh + g^2t^2}}$ nel punto qualunque M della traiettoria è diretta nello stesso senso della forza che sull'acqua agisce durante il movimento.

Questa forza è quella di gravità, o peso P dell'acqua, ed è diretta secondo la verticale. E l'accelerazione $\frac{d^2s}{dt^2}$ ecc. do-

(1) Questo principio, o principio della regola del parallelogrammo applicato a due spostamenti componenti, è stato e viene applicato nella pratica, in taluni meccanismi. Ad esempio, si considerino i telautografi, o sistemi telegrafici che riproducono sopra un foglio di carta al posto di arrivo i caratteri del dispaccio a misura che essi vengono formati dalla mano dello speditore alla stazione di partenza. Il principio sul quale essi si fondano consiste in questo: che il movimento di un punto in un piano può essere sempre scomposto in due movimenti con direzioni ad angolo retto fra di loro. E che inversamente due movimenti ad angolo retto possono essere composti in modo da riprodurre il movimento di un punto in una direzione determinata.

(2) Trascurabili se l'altezza h di caduta è piccola, ed è quindi piccola la velocità dell'acqua alla fine della caduta.

Ma se l'altezza di caduta fosse molto grande, e quindi fosse molto grande la velocità v del fluido che urta contro l'aria ecc., la resistenza di questa non sarebbe e non è più trascurabile. Come in seguito meglio si vedrà.

vendo avere la stessa direzione della forza, dovrebbe essere pure diretta verticalmente. Quindi essere parallela all'asse verticale delle y. Fare con quest'asse un angolo zero. E fare un angolo di 90° con l'asse delle x.

Ma se l'accelerazione $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}$ è parallela all'asse delle y, essa si proietta su quest'asse in vera grandezza. E siccome questa proiezione dà il valore della componente $\frac{d^2y}{dt^2}$ secondo l'asse delle y, così dovrebbe risultare $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2s}{dt^2}$.

E' vero questo, sempre nel caso in esame? Ho $dx=c\,dt$; $dy=g\,t\,dt$. Onde $\frac{dy}{dt}=gt$; $\frac{d^2y}{dt^2}=g$.

Se fosse $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2s}{dt^2}$, ed in quanto si è visto che $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{g^2t}{\sqrt{2\,gh+g^2t^2}}$ verrebbe $\frac{g^2t}{\sqrt{2\,gh+g^2t^2}}=g$.

Dividendo per g ho $gt=\sqrt{2\,gh+g^2t^2}$. Ed elevando a quadrato $g^2t^2=2\,gh+g^2t^2$; $2\,gh=o$.

E siccome 2 g è diverso da zero, dovrebbe risultare h=zero.

Cioè il dislivello h tra l'orifizio ed il livello superiore del liquido dovrebbe essere zero.

Più in generale, e ricordando che $2\,gh=c^2$ con c costante, dovrebbe risultare $\frac{g^2t}{\sqrt{c^2+g^2t^2}}=g$;

$gt=\sqrt{c^2+g^2t^2}$; $g^2t^2=c^2+g^2t^2$; $c^2=o$; $c=o$

Cioè la velocità c relativa al moto uniforme dovrebbe essere zero.

Posso così dire che tutte le volte che c è diverso da zero, tutte le volte, e nel caso dell'acqua, ecc. che il dislivello h è diverso da zero, il secondo principio della meccanica di Newton non è soddisfatto, non è conforme al vero.

* * *

Per meglio convincermi, dico:

A detta del secondo principio della meccanica di Newton dovrebbe dirsi che la forza f e l'accelerazione $a=\frac{d^2s}{dt^2}$ devono essere dirette nello stesso senso, ed essere parallele, perchè il loro rapporto dovrebbe essere costante. Cioè la forza e l'accelerazione corrispondente dovrebbero essere proporzionali tra di loro. Ed il valore del rapporto di proporzionalità dovrebbe rappresentare, essere il valore della massa o quantità di materia del corpo. Cioè dovrebbe risultare $\frac{f}{a}=m$; $f=m\,a$.

Considero il caso di una forza f costante. Dovrebbe risultare $m\,a=f=$costante, con m costante. E quindi $a=$costante.

Cioè ad una forza costante dovrebbe corrispondere sempre un'accelerazione $a=\frac{d^2s}{dt^2}$ pure costante.

Ma come si vedrà il dir questo non è vero in generale e sempre. E' invece vero soltanto quando la direzione della forza coincide con quella dello spostamento della massa sulla quale la forza agisce, ed inoltre la forza agisce senza braccio di leva. Ma se questo braccio esiste e va variando, col variare di tale braccio varia l'accelerazione, pur non variando la forza f.

* * *

Così nel caso dianzi preso in esame il secondo principio della meccanica newtoniana viene ad essere vero soltanto quando risulta c=zero, o sia zero il dislivello h. Venendosi ad ottenere, in questo caso particolare:

$$a=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{g^2t}{\sqrt{c^2+g^2t^2}}=\frac{g^2t}{\sqrt{2\,gh+g^2t^2}}\ \text{con}\ c=h=o.$$

Onde $a=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{g^2t}{\sqrt{g^2t^2}}=\frac{g^2t}{gt}=g=$Costante; $\frac{ds}{dt}=at+$Costante$=v$.

Suppongo che la velocità iniziale sia zero. Cioè che per $t=o$ sia $v=o$. Allora viene $\frac{ds}{dt}=a\,t=v=g\,t$.

Ed integrando ancora $s=\frac{1}{2}\,a\,t^2+$ costante.

Suppongo ancora che per $t=o$ sia $s=o$. Viene $s=\frac{1}{2}\,a\,t^2=$ $=\frac{1}{2}\,g\,t^2$.

Come ha trovato e dedotto Galileo nel caso della caduta verticale e libera dei gravi. Rispetto al quale si ha che la direzione della forza coincide con quella dello spostamento.

Il moto dei corpi, quando la direzione della forza è pressochè normale allo spostamento del loro centro di massa. — Moto dei pianeti.

Considero il moto di un pianeta attorno al rispettivo astro o Sole.

Il pianeta, poniamo la Terra, si muove per l'azione di una forza diretta dal centro del pianeta al centro del Sole. Il pianeta descrive una linea pressochè ellittica, i cui fuochi sono molto vicini. Tanto vicini da potersi considerare, in via di approssimazione, la ellisse come una circonferenza.

In uno dei fuochi dell'ellisse sta il Sole. Ed è questa la prima legge approssimata di Keplero sul moto dei pianeti, stata da Keplero e da altri trovata per mezzo dell'osservazione, dell'esperienza.

Sia ρ il raggio vettore che và dal centro del Sole al centro del pianeta. L'esperienza dice che il raggio vettore ρ fà un angolo piccolissimo col raggio di curvatura della linea percorsa dal pianeta. Così piccolo da poter essere considerato come zero, e da potersi porre, con grande approssimazione, $r=\rho$. (1)

Se la forza f agisce secondo il raggio r di curvatura, cioè se la forza f è normale, o quasi, alla traiettoria, deve aversi $f=f_n=\frac{mv^2}{r}$; $f^2=f^2_n$. E siccome $f^2=f^2_n+f^2_\tau$, deve risultare, con grande approssimazione, $f_\tau=m\,a_\tau=o$; $a_\tau=\frac{d^2s}{dt^2}=o$.

Vedo se questi presupposti conducono a conseguenze conformi al vero. Si abbia, adunque e per ipotesi, $f=\frac{mv^2}{r}$.

Nel caso del moto dei corpi celesti si può porre $v=\frac{2\pi r}{T}$,

(1) Questo, però, è un caso particolare. Quindi devesi dire che nel caso particolare del moto dei corpi celesti attorno al rispettivo astro o Sole è lecito di confondere il raggio vettore che và dal centro del Sole al centro del pianeta col raggio di curvatura della linea che il pianeta descrive. E da qui inferire il principio detto delle aree. Il principio, cioè, a detta del quale l'area descritta dal raggio vettore è proporzionale al tempo impiegato a descriverla. Il quale principio viene ad essere vero non in generale, per tutte le forze centrali quali son quelle che agiscono sui pianeti, ma solo nel caso particolare in cui il raggio vettore è un tutt'uno, o può essere considerato come un tutt'uno, col raggio di curvatura.

Si è invece preteso, in generale, che tutte le volte che una forza è centrale è lecito di confondere il raggio vettore col raggio di curvatura. E da un tal presupposto non sempre vero si è dedotto il principio delle aree.

Principio che nei riguardi del moto dei pianeti corrisponde alla seconda legge approssimata di Keplero.

dove T è il tempo che il pianeta impiega a fare una intera rivoluzione attorno al Sole. L'esperienza dice che il tempo periodico T è costante (così per la Terra è di un anno) mentre la velocità v và variando, pur variando di pochissimo, perchè va variando r (di molto poco, però). Perciò viene: $f = \frac{mv^2}{r} = m \times \frac{4\pi^2 r}{T^2}$. E moltiplicando per r^2, $fr^2 = m \times \frac{4\pi^2 r^3}{T^2}$.

Per la terza legge di Keplero sul moto dei pianeti so che i quadrati dei tempi periodici stanno fra di loro come i cubi dei raggi delle orbite o traiettorie che essi descrivono. Conseguentemente ottengo $\frac{r^3}{T^2} = \text{Cost.}$; $\frac{4\pi^2 r^3}{T^2} = 4\pi^2 \times \text{Cost.} = \text{Cost.} = h$. E sostituendo $fr^2 = h\,m$; $f = h \frac{m}{r^2}$.

Pertanto la forza f è inversamente proporzionale al quadrato di r, cioè al quadrato della distanza fra il Sole ed il pianeta. E l'esperienza dice che questo è vero.

* * *

Ammetto, per ipotesi, che si verifichi questa relazione, cioè che la forza vari in ragione inversa del quadrato della distanza del centro del Sole dal centro del pianeta, e che la forza sia normale, o quasi, alla traiettoria. Queste ipotesi sono espresse dalle relazioni $f = h \frac{m}{r^2}$; $f_n = f = \frac{mv^2}{r} = \frac{4\pi^2 m\, r}{T^2}$.

Eguagliando i secondi membri ho $h \frac{m}{r^2} = \frac{4\pi^2 m\, r}{T^2}$; $h\,T^2 = 4\pi^2 r^3$; $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{h} = \text{Cost.}$

Ottengo così la terza legge di Keplero.

* * *

Se invece ammetto questa legge, ed ammetto che la forza vari in ragione inversa del quadrato della distanza fra il Sole ed il pianeta, ottengo $f = h \frac{m}{r^2}$ con $\frac{T^2}{r^3} = \text{Cost.} = \frac{4\pi^2}{h}$ per ipotesi. Onde $h = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \times r = v^2 r$.

E sostituendo ad h il suo valore $v^2 r$, $f = h \frac{m}{r^2} = v^2 r \times \frac{m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} = f_n$.

Ho poi la legge o principio di Newton sull'attrazione universale osservando che posso porre $h = K\,M$, essendo M la massa del Sole e K una nuova costante. Onde $f = h \frac{m}{r^2} = K \frac{M\,m}{r^2}$.

Questa legge è importante, importantissima, perchè è soddisfatta non solo dalle forze e dai corpi celesti, ma da quasi tutte le forze della Natura. E' soddisfatta, ad esempio, dalle forze elettriche, dalle magnetiche, dalla forza di gravità. Nella trasmissione della luce, del calore, del suono, ecc. Ed è nota col nome di legge di Newton perchè stata dedotta da Newton.

* * *

Nei riguardi del moto dei pianeti la forza agente sul pianeta è pressochè normale alla traiettoria. Lo spostamento del punto di applicazione della forza, nella direzione della forza, ed in un tempuscolo dt, è quindi eguale, o su per giù eguale, alla variazione dr del raggio di curvatura.

Convengo di chiamare col nome di lavoro di una forza il prodotto della forza per lo spostamento del suo punto di applicazione, nella direzione della forza (1). Indico con d L il lavoro che la forza esercitata dal Sole fà nel tempuscolo dt. Tale lavoro è dato, nel caso in esame, da

$$dL = f_n \times dr = \frac{mv^2}{r} dr = K \frac{Mm}{r^2} dr.$$

In un certo tempo t il raggio di curvatura varî da r_1 a r_2. Si ottiene, integrando, $L = K\,M\,m \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = K\,M\,m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$.

Se la traiettoria fosse una circonferenza di raggio r si otterrebbe $r_1 = r_2 = r$; $dr = 0$; $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = 0$; $L = 0$.

E di lavoro non ne verrebbe fatto.

Ora la traiettoria che i pianeti descrivono attorno al Sole non è una circonferenza, ma pressochè una circonferenza. Quindi si può dire che il lavoro che si svolge è piccolo e trascurabile a fronte dello spazio che il pianeta percorre.

* * *

Convengo di chiamare energia di un corpo A l'attitudine o capacità del corpo a fare del lavoro, od a far fare del lavoro ad un corpo B soggetto ad un'azione promanante da A. Così ragionando, posso dire che l'energia che A spende per mantenere il moto di B è rappresentata dal lavoro che svolge B. Vengo a poter dire, per definizione, che lavoro ed energia sono fra di loro equivalenti. Che quindi l'energia che si spende è zero quando il correlativo lavoro è zero.

Nel caso del moto dei pianeti attorno al rispettivo astro o Sole, nel caso, per fissare le idee, del moto della Terra attorno al Sole, il lavoro che fa la Terra nel suo movimento è piccolo e pressochè trascurabile. Quindi è piccola e pressochè trascurabile l'energia che devesi spendere da parte del Sole per mantenere il movimento.

Per questa ragione, cioè per il fatto che nel moto dei corpi celesti il lavoro che si svolge è piccolo e trascurabile, ed è per conseguenza piccola e trascurabile l'energia che si richiede da parte del Sole per mantenerlo, questo movimento può conservarsi quasi indefinitamente, senza esaurirsi.

Come si sa dall'esperienza.

---

(1) Il dir questo rinviene anche a dire che il lavoro è dato dal prodotto dello spostamento del punto di applicazione di una forza per la proiezione della forza sulla direzione dello spostamento. In altri termini, il punto di applicazione di una forza f si sposti di ds nel tempuscolo dt. Sia α l'angolo che la direzione della forza f fa con quella dello spostamento ds. Il lavoro dL ecc. è dato da $dL = f \cos\alpha\, ds$.

Il moto circolare uniforme.

Suppongo che un moto sia perfettamente circolare ed uniforme, immaginando che un corpo di massa m descriva periodicamente una circonferenza di raggio r e centro C nel tempo T costante. Ho, indicando con s lo spazio che viene percorso ad ogni giro, $s = 2\pi r$.

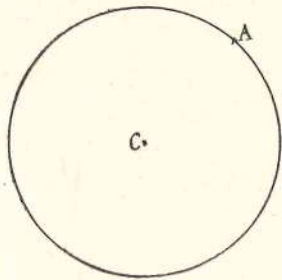



Fig. 5.

Lo spazio che viene percorso nell'unità di tempo è dato da $\frac{2\pi r}{T}$ con r e T costanti. E siccome questo spazio rappresenta anche la velocità (1) ho $v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{ds}{dt} = \text{Costante}$.

Differenziando viene: $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = a_\tau = a = o$.

Indico con f_τ la componente tangenziale, e con dL_τ il lavoro corrispondente in un tempuscolo dt. Ho $dL_\tau = f_\tau \cdot ds = m\, a_\tau\, ds = m\, a\, ds = o$.

Posso così dire che il lavoro che viene fatto nella direzione dello spostamento, cioè della tangente alla circonferenza che il punto materiale descrive, in un tempo piccolissimo dt, è zero.

Passo a considerare l'accelerazione a_n normale alla traiettoria o circonferenza, e la forza e lavoro relativi. Ho

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{\frac{4\pi^2r^2}{T^2}}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

con r e t costanti. Onde posso dire che tale accelerazione è costante. Che quindi, e per essere la massa m del corpo costante, pure la corrispondente forza $f_n = m\, a_n$ è costante.

Il lavoro $d\,L_n$ in un tempo piccolissimo dt è dato da $dL_n = f_n\, dr$, perchè la forza f agisce secondo il raggio r. Ma il raggio r è, per ipotesi, costante. Quindi $dr = o$; $dL_n = o$.

Ora il lavoro, e come in seguito meglio si vedrà, della forza f di componenti f_τ e f_n, è eguale alla somma dei lavori relativi alle due componenti. Se questo lavoro è zero pure quello che compete alla forza f è zero.

A conferma, osservo che questo lavoro è dato da $f\, ds_f$

$$\text{con } f = \sqrt{f_\tau^2 + f_n^2} = m \sqrt{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}} = m \sqrt{\frac{v^4}{r^2}} = m\frac{v^2}{r} = f_\tau,$$

per essere $\frac{d^2s}{dt^2} = o$. Quindi $ds_f = ds$; $f ds_f = f_\tau\, ds = o$.

Posso pertanto dire che la forza risultante è eguale alla componente normale alla traiettoria. E siccome lo spostamento di questa componente, nella direzione della componente, è zero, il lavoro ad essa relativo, e che è eguale al lavoro della forza risultante, è zero.

* * *

Ho così che nel moto circolare uniforme di lavoro non ne viene fatto. Perciò se si suppone che ad un corpo venga impresso un impulso iniziale, tale da fargli acquistare una velocità v, e si immagina che il moto sia circolare ed uniforme, questo moto viene a non richiedere, per conservarsi, alcun consumo di energia o di lavoro. Quindi può conservarsi indefinitamente. Ed il moto viene ad essere perpetuo.

Nella pratica, però, devesi aver presente che il corpo si muove, di solito, nell'aria. Quest'aria presenta una resistenza al moto. Per vincere questa resistenza occorre un consumo di lavoro, di energia. Inoltre devonsi vincere le resistenze nei perni, di attrito, ecc. Ed anche queste resistenze consumano dell'energia.

Accade perciò che la velocità v del corpo si mantiene costante in quanto gli si fornisce l'energia necessaria a vincere le resistenze passive. Se non si fa questo le resistenze passive vengono vinte a spese dell'energia di moto del corpo. E questa energia diminuisce, e diminuisce di conserva la velocità del corpo, fino a ridursi a zero.

Un'altra considerazione da farsi è che quand'anche il moto perpetuo quale sarebbe quello in esame, fosse realizzato, si verrebbe ad avere un moto che non dà lavoro, che non fornisce energia. Ed un moto di tal genere non potrebbe sostituir l'uomo nel lavoro che questi deve fare.

* * *

Le ragioni che rendono forse irrealizzabile, da parte dell'uomo, il moto perpetuo, non si verificano nei riguardi del moto dei corpi celesti. Difatti, questi corpi si muovono in un mezzo imponderabile, o pressochè tale, detto etere cosmico. E questo mezzo è di resistenza zero, o pressochè zero. Pertanto si può dire che nel moto dei corpi celesti la resistenza del mezzo non esiste. O per lo meno è trascurabile.

---

(1) A questa deduzione si giunge, come si sa, ragionando così:

Sia dato un corpo qualunque. Considero la posizione del corpo nei confronti o rapporti di un altro, ad esempio della Terra. Il corpo o si muove o non si muove rispetto alla Terra. Se si muove dico che è in moto, relativamente alla Terra. Se non si muove dico che è in quiete, sempre relativamente alla Terra.

Lo stato di moto di un corpo si esprime e rappresenta analiticamente per mezzo del rapporto o quoziente fra lo spazio che viene percorso ed il tempo impiegato a percorrerlo. Perchè ad un valore doppio, triplo,... di tale rapporto corrisponde una doppia attitudine o capacità del corpo a muoversi nello spazio; un doppio, un triplo,... spazio che viene percorso in un dato tempo. Ed il valore di tale rapporto chiamasi velocità.

Sia, adunque, $\frac{s}{t} = v$ la velocità di un corpo, o valore del rapporto fra lo spazio s che viene percorso in un tempo t e questo tempo t.

E' chiaro che il valore del rapporto $\frac{s}{t}$ o va variando o non va variando col trascorrere del tempo.

Se non va variando, se è costante, si ha $\frac{s}{t} = v$; $s = vt$ con v costante. Quindi gli spazi stanno fra di loro come i tempi impiegati a descriverli. Vengono percorsi spazi eguali in tempi eguali. Ed il moto dicesi uniforme.

Il valore del rapporto $\frac{s}{t}$ vada variando col tempo. Rispetto ad un dato corpo la variazione dev'essere ed è tanto più piccola quanto più è piccolo il tempo durante il quale la variazione avviene. Se il tempo è piccolissimo, pure la variazione del rapporto fra spazio e correlativo tempo, e che ha luogo in un tempo piccolissimo, è piccolissima. Se il tempo è tanto piccolo da poter essere considerato come zero, pure la variazione del rapporto fra spazio e relativo tempo, cioè la variazione della velocità, è così piccola da poter essere considerata come zero.

Se, sempre nei riguardi di un tempo piccolissimo, la variazione della velocità può essere considerata come zero, la velocità stessa viene a non essere più variabile. Da qui consegue che quando la velocità è variabile il suo valore ad un istante o tempo t è rappresentato dal valore del rapporto $\frac{ds}{dt}$ fra lo spazio piccolissimo ds che viene percorso in un tempo piccolissimo dt e questo tempo (contato a partire dall'istante in cui è trascorso il tempo t).

Nella pratica si misura e determina il valore della velocità v di un corpo all'istante o tempo t misurando lo spazio che viene percorso nell'unità di tempo a partire dall'istante t, con velocità eguale a quella che si ha a questo istante. E la ragione di tal modo di procedere è questa: Sia ds lo spazio piccolissimo che viene percorso in un tempo piccolissimo dt. Se si fa in modo che la velocità v non vari, deve risultare:

Spazio ds che viene percorso nel tempo piccolissimo dt stà al tempuscolo dt, come lo spazio v che viene percorso nel tempo uno stà a questo tempo uno. Cioè $\frac{ds}{dt} = \frac{v}{1}$. Onde viene $\frac{ds}{dt} = v =$ spazio che viene percorso nell'unità di tempo.

Ciò posto, considero il moto di rotazione della Terra attorno al proprio asse polare, facendo un giro ogni 24 ore. L'asse polare esiste, ma non è rigido, non ha perni. Perciò la resistenza relativa, e le resistenze passive in genere, sono zero.

Sia A un punto della superficie terrestre e r il raggio del parallelo dello sferoide terrestre passante per A. Il raggio r rappresenta ed è la distanza fra il punto A e l'asse di rotazione della Terra attorno a sè stessa.

Il punto A descrive una circonferenza di raggio r, e percorre lo spazio $2\pi r$ nel tempo costante di 24 ore. Questo tempo non varia da secoli, da millenî. Quindi il moto è circolare ed esattamente uniforme. In un moto di questo genere di lavoro non se ne svolge o fà.

Ed è per questa ragione che il moto può conservarsi eternamente, perpetuamente.

* * *

Nei riguardi della formola $f = m\, a$, esprimente il secondo principio della meccanica Newtoniana, posso dire:

Nel moto circolare uniforme si ha $a = \frac{d^2 s}{dt^2} = o$. Quindi $f = o$.

Nel caso di $f = o$, ed in quanto a detta della meccanica Newtoniana la forza $f = m\, a$ rappresenta la forza agente sul corpo, si dovrebbe dire che il corpo è soggetto ad una forza zero. Cioè a nessuna forza. E che per conseguenza, e sempre a detta della meccanica Newtoniana, il moto dev'essere rettilineo ed uniforme. (1)

Mentre è, nel caso in esame e per ipotesi, circolare.

* * *

Si può anche dire:

Se si parte dal presupposto che la formola $f = m\, a$ debba ritenersi come generalmente e sempre vera come è stato fatto per l'addietro ed ancor oggi si fa;

per il fatto che nel moto circolare uniforme l'accelerazione tangenziale alla traiettoria, o circonferenza, $a_T = \frac{d^2 s}{dt^2}$ è zero;

per il fatto che l'accelerazione normale a_n alla traiettoria è eguale a $\frac{v^2}{r}$;

viene ad essere giocoforza dire che $f = m \frac{v^2}{r}$. Come nei trattati di fisica e di meccanica si è detto e si dice.

Ma così facendo, cioè ponendo $f = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2 s}{dt^2} = m \frac{v^2}{r}$, si commette l'errore di porre $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{v^2}{r}$.

Il che è erroneo tutte le volte che v è costante, ed r è diverso da zero. Come avviene nel moto circolare uniforme. Perchè nel caso di $v =$ costante si ha che $\frac{dv}{dt} = o$, mentre $\frac{v^2}{r}$ è diverso da zero. Quindi non può darsi che si verifichi la eguaglianza $\frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{r}$ fra una espressione di valore zero ed una espressione di valore diverso da zero.

Nel moto circolare uniforme la forza risultante è zero, come nel moto rettilineo uniforme. E tanto un moto che l'altro sono senza svolgimento di lavoro. - Deduzione del principio dell'energia di moto o forza viva nel caso particolare della rottura dell'equilibrio di un moto uniforme, circolare o rettilineo.

Un corpo che si muove di moto circolare uniforme ha necessariamente una velocità diversa da zero. Velocità che si ha anche nel moto rettilineo uniforme.

Nel caso del moto circolare uniforme tale velocità è data da $v = \frac{2\pi r}{T}$. E ci si può chiedere:

In virtù di questa velocità il corpo viene a possedere dell'energia di moto, ad avere dell'attitudine o capacità a fare del lavoro.

Per meglio vedere come stanno le cose considero il caso della fionda.

Immagino che un corpo di peso P e massa m venga fatto ruotare attorno ad un punto C, ed obbligato a descrivere delle circonferenze di centro C e raggio C A, con velocità v costante. Sia $C\,A = r$ la lunghezza di una corda rigida, non suscettibile di allungamento, e sia A la posizione in cui si trova il centro di massa del corpo all'istante t.

La forza $f_n = A\,D$ normale alla traiettoria tende ad allontanare il corpo dal centro della traiettoria. Posso perciò convenire di chiamarla forza centrifuga.

Alla forza centrifuga $A\,D = m \frac{v^2}{r}$ deve corrispondere

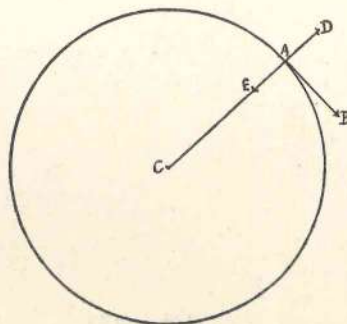



Fig. 6.

una forza centripeta A E eguale e contraria, cioè una reazione eguale e contraria. Invero, se questa reazione non esistesse, e la forza non fosse contrastata nella sua azione, il corpo dovrebbe allontanarsi dal centro C della traiettoria. Per conseguenza il raggio $r = C\,A$ dovrebbe andare aumentando. E la traiettoria non sarebbe più una circonferenza o linea a raggio r costante.

Tale reazione, evidentemente, è contrapposta dalla corda, supposta rigida.

La stessa corda impedisce poi al corpo di muoversi lungo la tangente A B alla traiettoria. Difatti, suppongo che lungo questa tangente il corpo si porti da A in B, percorrendo il tratto rettilineo A B della tangente ecc. Si avrebbe che la distanza fra il centro di massa del corpo ed il centro C della curva, distanza che dev'essere eguale alla lunghezza della corda che trattiene il corpo, sarebbe data da $\sqrt{r^2 + A\,B^2}$. Ma questo non può essere, perchè se la corda è rigida e non si allunga, la distanza fra il centro del corpo ed il punto C non può superare il valore di r. Posso così dire ancora che la corda, dovendo reagire contro ogni suo allungamento, deve contrapporre una reazione eguale e contraria alla forza che tende a spingere il corpo lungo la tangente alla traiettoria.

Pertanto il corpo di peso P e massa m, che per ipotesi si muove di moto circolare uniforme, è soggetto a due forze eguali e contrarie, corrispondenti alla forza centrifuga ed alla centripeta, e ad altre due forze eguali e direttamente contrarie agenti secondo la tangente alla traiettoria. La forza risultante di questo sistema è zero. E posso dire che:

Un corpo soggetto ad un sistema di forze di risultante zero può muoversi di moto circolare ed uniforme.

Conseguentemente non è sempre vero il dire che quando un corpo è soggetto ad un sistema di forze di risultante zero, e quindi ad una forza effettiva zero, esso o è in quiete o si muove di moto uniforme e rettilineo soltanto, come si dice nella meccanica Newtoniana.

Devesi invece dire che il moto dev'essere uniforme od a velocità costante, come si dice nella meccanica di Galileo e di Newton, ma dire, inoltre, che può essere tanto rettilineo che circolare. Perchè tanto in un caso che nell'altro la forza che effettivamente agisce sul corpo, la forza risultante, è zero. E tanto in un caso che nell'altro di lavoro non ne viene svolto.

---

(1) Perchè secondo la meccanica Newtoniana se un corpo non è soggetto a forze, ed è in quiete, è fermo, esso deve continuare ad essere in quiete, ad essere fermo. Se è in moto, come nel caso in esame, esso deve muoversi di moto rettilineo ed uniforme.

* * *

Ad un certo momento immagino che si rompa la corda della fionda, o che la corda non sia più trattenuta, e sia lasciata libera di seguire il corpo. Allora la reazione della corda non esiste più, si riduce a zero. Il corpo è perciò libero di muoversi in virtù dell'energia di moto che ha. E si muove e parte, dice l'esperienza, nella direzione della tangente alla traiettoria.

* * *

Vedo perchè avviene questo.

Allorchè lascio la corda non è più vero il dire che il corpo di peso P e massa m è soggetto ad un sistema di forze di risultante zero. Invero, sia ds lo spazio che il centro di massa del corpo percorre in un tempo piccolissimo dt a partire dall'istante o tempo t in cui viene abbandonata la corda. Se il corpo si muove nell'aria, se si muove in un mezzo resistente, la sua velocità va diminuendo, e diminuendo tanto più rapidamente quanto più sono grandi le resistenze che si oppongono al moto. Per il fatto che la velocità v và variando, il valore di $\frac{dv}{dt}$ non è più zero, come si verificava quando il moto era uniforme. Ma diverso da zero.

Sia f_τ la forza tangenziale all'inizio del movimento del corpo, lungo la tangente. Questa forza non è più contrastata da una reazione eguale e contraria, perchè la reazione era contrapposta dalla corda, ed ora la corda non reagisce più.

Ho $f_\tau = m\,a_\tau = m\frac{d^2s}{dt^2} = m\,a$. E gli è come se il corpo fosse lanciato da una forza istantanea, forza che nasce dalla rottura od abbandono della corda, dalla rottura dell'equilibrio, e di valore eguale a $f_\tau = m\,a$. Inoltre il corpo è soggetto alla forza P, se con P rappresento il peso del corpo, diretta verticalmente, dall'alto verso il basso, ecc.

* * *

Considero ancora una fionda. Fò in modo che per un certo tempo t la palla della fionda si muova con moto circolare uniforme. Durante questo tempo esistono realmente tanto la forza centrifuga che la reazione centripeta. E di ciò mi posso convincere considerando delle esperienze note, o che posso fare io stesso. Quando, ad esempio, sono a cavallo e percorro una curva a grande velocità, sento che esiste una forza centrifuga che tende a lanciarmi al di fuori della curva, ad allontanarmi dal centro di questa. Io reagisco contro la forza, che realmente agisce su di me, inclinandomi verso il centro della curva. E venendo a creare, così facendo, una reazione o forza centripeta. La quale, a sua volta, viene ad esistere realmente. (1)

Nel caso in esame, cioè nel caso del moto circolare uniforme, ho che le due forze, centrifuga una e centripeta l'altra, sono eguali e direttamente contrarie. Inoltre hanno lo stesso punto di applicazione. Il quale punto è quello di attacco della corda con la palla o corpo della fionda. Vengo così ad avere un sistema di due forze eguali e direttamente contrarie applicate ad uno stesso punto.

Sia m la massa della palla. Posso ammettere che essa possiede una forza tangenziale, dovuta alla sua energia di moto, ed avente per punto di applicazione il centro di massa del corpo. Esiste anche, però, una reazione eguale e contraria, data dalla reazione della corda a subire degli allungamenti. E questa reazione ha ancora per punto di applicazione il punto di attacco della corda alla palla o corpo della fionda. Perciò la forza risultante lungo la tangente, o forza componente tangenziale, in quanto è la risultante di due forze eguali e contrarie, è zero.

Quando abbandono la corda la reazione o forza centripeta della corda si riduce a zero. Pure la forza centrifuga e contraria, avente lo stesso punto di applicazione, si riduce a zero. Invero, indico con ds il primo tratto piccolissimo della tangente alla traiettoria che viene percorso in un tempuscolo dt dal centro della massa m, a partire dall'istante in cui abbandono la corda. Il raggio di curvatura è infinitamente grande, perchè il corpo percorre un trattino di linea retta. Quindi la forza centrifuga è $\frac{mv^2}{r} = \frac{mv^2}{\infty} = 0$.

Debbo poi dire che anche la reazione tangenziale della corda si riduce a zero, per l'ovvia ragione che la corda non reagisce più. E quindi dire che per effetto dell'abbandono della corda le quattro forze che si avevano prima, e che realmente esistevano, si riducono ora ad una forza soltanto. Che tre forze, e cioè la reazione centripeta, la forza centri-

---

(1) Il dire questo non è superfluo, come potrebbe sembrare a taluni, ma può essere, invece, molto importante.

Difatti, taluni hanno creduto di giustificare certi disaccordi fra quello che dice l'esperienza e quel che dovrebbe verificarsi se la formola f=m a fosse generalmente e sempre vera, col dire che la forza centripeta è una reazione alla centrifuga. Che la reazione ad una forza può essere considerata come ideale, come non esistente. Che quindi si può ammettere che esista soltanto, e realmente, la forza centrifuga.

Ma in certi casi si trova che ciò non può essere. Perchè si trova che la forza centripeta esiste veramente, realmente. Ed allora taluni hanno creduto di cavarsela col dire che è la forza centripeta che si deve ammettere come realmente esistente. E la centrifuga come una forza ideale, astrattamente considerata, ecc.

Ma anche questo non è vero. Almeno in generale. E per convincermi di ciò ricorro all'esperienza. Ricorro, ad esempio, al regolatore di Watt.

Un corpo di massa m, peso P, centro A sia obbligato a ruotare attorno alla verticale B C, essendo B un punto fisso. Ed essendo il corpo di peso P e centro di massa A invariabilmente connesso col punto fisso B per mezzo di un'asta rigida A B.

Ad un certo istante il corpo descriva delle circonferenze di centro C e raggio C A=r, restando sollevato, ecc.

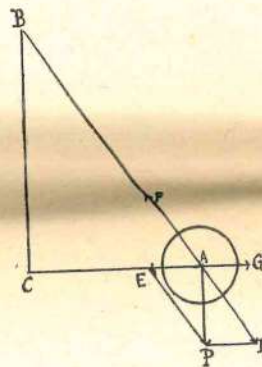



Fig. 7.

Se la forza centrifuga non esistesse il corpo di peso P dovrebbe cadere e scendere sino a quando il suo centro di gravità o di massa A abbia a passare per la verticale condotta per B. Cioè per la verticale B C. E siccome questo non avviene, dico che la forza centrifuga necessariamente esiste.

Suppongo che non esista la forza centripeta. Decompongo la forza f=P rappresentata dal peso del corpo in due componenti, rispettivamente secondo A B e secondo A C. Siano A D e A E tali componenti.

Se l'asta A B è rigida, e se il punto B è fisso, come si è supposto ed ammesso per ipotesi, la componente A D dev'essere elisa da una reazione eguale e contraria A F, contrapposta dall'asta rigida e dal punto fisso B.

Resta così, come sola forza, la componente A E. E siccome questa tende a portare il corpo verso il centro C della traiettoria, (rappresentata da una circonferenza di centro C e raggio C A), posso dire che A E è la forza centripeta.

Se questa forza centripeta non esistesse, se fosse zero, il corpo di massa m e centro A verrebbe ad essere soggetto alla sola forza centrifuga f_n = A G. Per l'azione di questa sola forza il corpo dovrebbe sollevarsi via via, in virtù di un momento di rotazione di valore eguale al prodotto della forza per il suo braccio di leva rispetto a B. Cioè di valore eguale a f_n x braccio B C rispetto a $B = f_n \times BC$.

Questo movimento dovrebbe cessare soltanto quando il braccio B C si fosse ridotto a zero. Il, che si verificherebbe quando il centro A di massa del corpo passasse per il piano orizzontale condotto per B.

In altri termini, il corpo dovrebbe sollevarsi via via sino a portare il proprio centro A di massa nel piano orizzontale passante per B.

Ora ciò non avviene. E siccome al risultato erroneo cui sono pervenuto mi ha condotto il presupposto che la forza centripeta non esista, dico che il presupposto non è vero.

E se non è vero il dire che la forza centripeta non esiste, è necessariamente vero il dire che esiste.

fuga, la reazione tangenziale si riducono a zero. Che non resta, così, che la sola forza corrispondente all'energia di moto del corpo, di valore eguale alla componente tangenziale e diretta secondo questa componente.

Ed in quanto questa forza è diversa da zero, e rappresenta ora la forza totale o risultante, così il sistema non è più in equilibrio.

* * *

Da che legge è retto, nel caso in esame, il movimento? Se il corpo si muove lungo la tangente alla traiettoria, come dice l'esperienza, specie all'inizio del movimento, ed in quanto la tangente è una retta, ho $r = \infty$. Perciò la relazione $f = m \sqrt{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}}$ si semplifica nella

$$f = m \sqrt{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2} = m \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Se la forza promana dal corpo, come avviene nel caso in esame (ma non in generale), lo spostamento della forza è eguale allo spostamento del corpo. La direzione della forza e la direzione dello spostamento sono eguali, per essere entrambe rappresentate dalla direzione della tangente alla traiettoria.

Indico con ds tale spostamento in un tempuscolo dt.

Moltiplico i due membri dell'eguaglianza $f = m \frac{d^2s}{dt^2}$ per ds.

Ottengo $f\, ds = m \frac{d^2s}{dt^2} ds = m \frac{d^2s}{dt^2} \frac{ds}{dt} dt = m v \frac{dv}{dt} dt = $

$= m v\, dv = d \frac{m v^2}{2}$.

Convengo di chiamare il prodotto $\frac{m v^2}{2}$ col nome di energia di moto del corpo. Posso allora dire:

Per il fatto che f ds è il lavoro che fa la forza, questo lavoro viene ad essere equivalente all'energia di moto che il corpo perde via via durante il suo movimento.

Ottengo così un principio che è stato chiamato il principio dell'energia di moto o forza viva, a seconda che si conviene di chiamare il semi prodotto $\frac{m v^2}{2}$ col nome di energia di moto o con quello di forza viva.

* * *

Il principio può pure essere dedotto nel caso della rottura dell'equilibrio di un moto uniforme e rettilineo, invece che circolare.

Difatti, un corpo si muove di moto rettilineo ed uniforme quando o non è soggetto ad alcuna forza, od è soggetto ad un sistema di forze di risultante zero.

Un sistema di forze di risultante zero equivale a due forze eguali e direttamente contrarie. Onde posso dire che un corpo si muove di moto rettilineo ed uniforme quando è soggetto ad un sistema di due forze eguali e direttamente contrarie.

E' questo il caso che sempre si verifica nella pratica. Invero si consideri, per fissare le idee, il caso di un treno che si muova di moto rettilineo ed uniforme. Posso dire che il treno non è soggetto ad alcuna forza? No, perchè so che è soggetto alla forza di propulsione del vapor d'acqua agente nella motrice della locomotiva.

L'azione di questa forza, però, è contrastata da una reazione in senso contrario, rappresentata dalle resistenze utili che si vincono, cioè dal peso delle persone e delle merci che vengono trasportate; dal peso del treno e della locomotiva; dalle resistenze passive e di attrito nei perni; dalla resistenza dell'aria che viene spostata dal treno nel suo movimento, ecc.

Orbene, e come si sa dall'esperienza, è quando la somma di queste reazioni corrisponde ad una forza eguale e contraria alla forza di propulsione f del vapore, od azione, che il moto risulta rettilineo ed uniforme. Pertanto se indico con ρ una tal reazione, vengo ad avere $f - \rho = o =$ forza risultante.

Se il moto è rettilineo la forza risultante dev'essere, per quanto si è visto, eguale a $m \frac{d^2s}{dt^2}$. Perciò ottengo

$$f - \rho = m \frac{d^2s}{dt^2} = o; \quad \frac{d^2s}{dt^2} = o; \quad \frac{ds}{dt} = v = \text{Costante}.$$

Ed il moto dev'essere uniforme, come dice l'esperienza.

* * *

A partire da un certo istante riduco la forza f a zero. Ad esempio, non fo più agire il vapore sullo stantuffo o sugli stantuffi della motrice.

Non ho più, allora, un sistema di forze in equilibrio. Gli è come se il treno fosse soggetto alla sola forza $-\rho$, diretta in senso contrario a quello del movimento, ma nella stessa direzione di questo. Ho $-\rho = m \frac{d^2s}{dt^2}$, con ρ diverso da zero, e quindi, per essere m diverso da zero, $\frac{d^2s}{dt^2}$ diverso da zero.

Per le ipotesi fatte la direzione dello spostamento è eguale a quella della forza reagente ρ. Posso pertanto dire che se indico con ds lo spostamento del centro della massa m nel tempuscolo dt, lo spostamento della forza reagente ρ nello stesso tempuscolo è pure rappresentato da ds.

Posto ciò, moltiplico i due membri dell' eguaglianza $-\rho = m \frac{d^2s}{dt^2}$ per ds. Viene $-\rho\, ds = m \frac{d^2s}{dt^2} ds = m \frac{dv}{dt} v\, dt =$

$= m v\, dv = d \frac{m v^2}{2}$.

Ora $-\rho\, ds$ è il lavoro che si svolge. Se questo lavoro lo indico con d L debbo porre $-\rho\, ds = d L$. Ed ho così $d L = d \frac{m v^2}{2}$.

Ottengo pertanto che il lavoro che si svolge e viene fatto in un tempuscolo dt è eguale alla variazione (e nel caso in esame diminuzione) dell'energia di moto, nello stesso tempuscolo.

Ottengo, cioè, il principio dell'energia di moto o forza viva. Il quale può anche essere chiamato principio di equivalenza fra lavoro ed energia di moto.

* * *

Nella vecchia meccanica dal principio dell'energia di moto vien dedotto, come conseguenza, quello della conservazione dell'energia. Commettendo, però e come in seguito meglio si vedrà, il grosso errore di considerare l'equivalenza tra lavoro ed energia come un tutt'uno con la conservazione dell'energia. Mentre si tratta di cose ben diverse e distinte.

Nei riguardi, poi, dell'equivalenza tra lavoro ed energia, e per il fatto che molti non hanno delle idee chiare su ciò che devesi intendere per energia, è bene chiarire un po' le idee al riguardo.

Nella meccanica che si va trattando per energia di un corpo s'intende l'attitudine, o capacità, o potenzialità del corpo a fare del lavoro. Dalla quale definizione consegue che il lavoro e l'energia sono, in fondo, una stessa cosa. Ed è naturale, allora, che si equivalgano.

A questo proposito è bene esaminare la seguente obbiezione, che potrebbe farsi.

Ammettiamo, adunque, che energia e lavoro correlativo, o viceversa, siano tra di loro equivalenti. Dovrebbe allora risultare che tutte le volte che l'energia è zero pure il corrispondente lavoro è zero. E se è invece zero, o nullo, il lavoro, pure zero o nulla dovrebbe essere l'energia.

Ora questo non è vero. Così nel moto dei corpi celesti il lavoro relativo al movimento è zero o pressochè zero, mentre l'energia di moto $\frac{m v^2}{2}$ del corpo celeste è tutt'altro che zero.

Del pari nel moto circolare uniforme, nel moto della fionda... è zero, o pressochè zero, il lavoro, mentre l'energia di moto non è affatto zero. E se fosse zero di movimento non se ne avrebbe, perchè verrebbe a risultare $\frac{m v^2}{2} = o$ con $\frac{m}{2}$ diverso da zero, e quindi $v = o$.

Si dovrebbe quindi dire, nei casi ora esaminati, che lavoro ed energia di moto non sono tra di loro equivalenti.

Ed invece lo sono, quando si chiariscano meglio le idee. Ad esempio, il danaro ha valore in quanto rappresenta ed è una potenzialità, un mezzo col quale ci possiamo provvedere di quelle merci o cose,... di cui abbiamo bisogno. Ed è giusto il dire che se si compera, poniamo, una data quantità di merce sborsando una certa quantità di danaro, il valore della merce viene ad essere equivalente al valore del danaro, o viceversa... Onde un principio che potrebbe dirsi di equivalenza fra il danaro e la correlativa merce.

Ora quando abbiamo il danaro, e non abbiamo ancora comperata la merce, possediamo il danaro, ma non la merce Mentre il danaro è diverso da zero, la merce, che ancora non possediamo, è zero. Quindi dovremmo dire che danaro e merce non sono fra di loro equivalenti.

Del pari, quando si è acquistata la merce, e la si è pagata, e se ne ha il possesso, si ha la merce, ma non si ha più il danaro che si è sborsato per averla. Quindi si dovrebbe dire che per noi esiste ora la merce, ma non esiste più, nei riguardi nostri, il danaro che più non si ha. E dire, ancora, che merce e danaro ecc. non sono fra di loro equivalenti.

Mentre lo sono, e come sopra dicendo si verrebbe a dire una bestialità.

Per non cadere in questa bestialità devesi dire che il danaro e la corrispondente merce sono tra di loro equivalenti quando avviene lo scambio o trasformazione fra il danaro e la correlativa merce, o viceversa.

Analogamente devesi dire che l'energia di moto, poniamo, ed il correlativo lavoro sono fra di loro equivalenti quando avviene la trasformazione (corrispondente ad uno scambio) dell'energia di moto in lavoro, o viceversa. Così dire che nel moto dei corpi celesti, nel moto circolare uniforme, della fionda... l'energia di moto $\frac{m v^2}{2}$ è diversa da zero, e non si trasforma, e resta invece costante, o pressochè costante. Mentre il lavoro è zero, o pressochè zero.

Come il danaro rappresenta ed è una potenzialità atta a farci avere una equivalente merce, così l'energia è una potenzialità atta a farci ottenere od avere un equivalente lavoro.

Come il danaro è diverso da zero, mentre la merce è zero, prima che avvenga lo scambio o trasformazione del danaro in merce, così l'energia è diversa da zero, mentre è zero il lavoro, prima che avvenga la trasformazione dell'energia in lavoro.

Del pari si può dire che come, nei rapporti nostri, dopo lo scambio è diversa da zero la merce, mentre è zero, perchè non l'abbiamo più, il danaro sborsato, così è diverso da zero il lavoro, mentre si riduce a zero l'equivalente energia, dopo che la trasformazione dell'energia in lavoro è avvenuta. Ad esempio, si consideri il caso della fionda. Finchè si tiene la corda, e si impedisce alla palla di fuggire nella direzione della tangente alla traiettoria, l'energia di moto $\frac{m v^2}{2}$ è diversa da zero, mentre il lavoro è zero. A partire dall'istante in cui si lascia la corda e la palla fugge ecc., si svolge un certo lavoro, che va aumentando gradatamente a partire da zero. Via via che avviene questo la velocità v va gradatamente diminuendo, fino a ridursi a zero. E quando la velocità v è zero l'energia di moto è pure zero. Mentre il lavoro è giunto al suo valore massimo.

E' il valore di questo lavoro massimo, e che si ha quando v si è ridotta a zero, che è equivalente all'energia di moto (o variazione di energia), che si aveva prima che avvenisse la trasformazione dell'energia in lavoro.

Il principio del parallelogrammo delle velocità come vero non in senso assoluto, ma relativo al caso di una massa libera animata contemporaneamente da due o più velocità realmente esistenti.

Merita di soffermarsi un po' a considerare quel che si è detto e si è visto nel capitolo precedente.

Suppongo ancora che un corpo, una palla,... sia trattenuto da una corda, od in altro conveniente modo, e quindi sia vincolato, e sia soggetto a doversi muovere di moto circolare uniforme, o pressochè tale, come avviene nella fionda.

Se abbandono la corda vedo che la palla si muove nella direzione della tangente alla traiettoria, nella direzione della forza componente tangenziale. E questa è una verità millenaria, nota all'uomo sin dai tempi primitivi. Quindi è cosa certamente vera.

Per spiegare la cosa si è detto che quando si abbandona la corda si riducono a zero tanto la reazione centripeta alla forza centrifuga, quanto la reazione alla forza componente tangenziale. Che col ridursi a zero della reazione alla forza centrifuga, pure questa forza si riduce a zero, che resta così la sola forza componente tangenziale. Onde si spiega il fatto che il corpo si muova nella direzione di questa componente.

E sta bene, in quanto così ragionando vengo a rendermi ragione del risultato o fatto che l'esperienza mi dà.

* * *

Ma una cosa devesi a questo punto dire. Ed è che se ciò è vero, è pure vero il dire che quella che è verità nei riguardi delle due forze corrispondenti alla componente tangenziale ed alla relativa reazione, non è più verità nei rapporti delle due forze rappresentate dalla forza centrifuga, o normale alla traiettoria, e dalla corrispondente reazione centripeta.

Invero, in un caso col ridursi a zero della reazione pure l'azione si riduce a zero, perchè col ridursi a zero della reazione centripeta anche l'azione relativa, o forza centrifuga, si riduce a zero. Nell'altro caso, invece, col ridursi a zero della reazione resta l'azione, e resta libera di agire ed agisce, perchè col ridursi a zero della reazione alla forza componente tangenziale questa forza resta ed agisce.

Da qui devesi inferire che si tratta di due casi diversi, cui corrispondono due verità diverse. Che quindi non è vero il dire che la verità dev'essere univoca, assoluta; che per conseguenza ciò che è verità in un certo caso dev'essere pure verità in un caso differente.

* * *

Resta a vedere in che cosa i due casi sopra considerati sono differenti. Ed allora osservo che quando la palla è trattenuta dalla corda della fionda od in altro conveniente modo, e si muove di moto circolare uniforme, lungo una circonferenza di raggio dato e costante, esiste un suo movimento diretto secondo la tangente alla traiettoria, secondo la forza componente tangenziale. Ma non esiste movimento diretto secondo il raggio, secondo la direzione della componente normale alla traiettoria, o forza centrifuga.

Se esiste un movimento, esiste pure la corrispondente velocità. Se un movimento non esiste, anche la relativa velocità non esiste. Quindi dico che nei riguardi della forza componente tangenziale esiste la forza, esiste un movimento nella direzione della forza, esiste la corrispondente velocità. Invece nei rapporti della forza centrifuga esiste la forza, ma non esiste movimento nella direzione della forza, non esiste la relativa velocità.

E per questo dico ancora che i due casi sono diversi.

* * *

Un'altra cosa osservo e dico. Nell'istante in cui abbandono la corda, e la palla passa da vincolata in libera, esistono tanto la forza componente tangenziale quanto la forza centrifuga, o forza normale alla traiettoria. Se le due forze esistono, e se è vero il principio del parallelogrammo delle

forze, io posso applicare questo principio. Dire che la palla viene ad essere soggetta ad una forza risultante data dalla diagonale del parallelogrammo costruito sulle due forze componenti.

Suppongo ora, come si fa nella vecchia meccanica, che dall'essere vero e dal verificarsi del principio del parallelogrammo delle forze consegue che il principio del parallelogrammo deve verificarsi anche per le accelerazioni e per le velocità. Dovrei allora dire che la palla deve avere una velocità risultante diretta secondo una direzione compresa fra quelle delle due velocità componenti. E siccome queste sarebbero dirette secondo la tangente alla traiettoria e la normale a questa, dovrei dire che la velocità risultante, e secondo cui la palla si dovrebbe muovere quando è lasciata libera, dev'essere diretta secondo una direzione compresa nell'angolo retto formato dalla tangente alla traiettoria e la normale a questa

Ma questo non è vero, dice l'esperienza, perchè la palla si muove invece nella direzione della tangente alla traiettoria.

* * *

Non sempre, però, è così Prendo un apparecchio analogo a quello che in fisica viene chiamato della forza centrifuga, ma con la differenza che le palle invece di essere infilate in un'asta che viene fatta girare, possano muoversi lungo due specie di rotaie o guide. Guide che possono ottenersi foggiando l'asta a forma di U.

Pongo una palla sull'asta ad U, ad una piccola distanza dall'asse di rotazione. Se poi fo girare l'asta, se la fo rotare via via più rapidamente, vedo che la palla scorre e si muove lungo le due guide, allontanandosi dal centro, sino a sfuggire dall'asta.

Adesso, e come in seguito meglio si vedrà, ho che la palla si muove lungo il raggio, lungo l'asta, allontanandosi via via dal centro di rotazione, perchè esistono, sì, tanto la forza centrifuga che la reazione centripeta, ma la reazione non è eguale all'azione. La reazione, o forza centripeta (1), è invece minore dell'azione, o forza centrifuga. La forza risultante delle due forze dette azione e reazione non è quindi più zero, come era nei casi precedentemente considerati, ma diversa da zero e diretta nel senso della forza maggiore. Perciò nel senso della forza centrifuga, nel senso che va dal centro della circonferenza ecc. verso l'esterno. Ed è per questo che la palla si muove, allontanandosi dal centro di rotazione, fino a sfuggire dall'asta.

Quando avviene questo, e la palla passa da vincolata (parzialmente) in libera, essa è animata tanto da una velocità diretta secondo la tangente alla traiettoria quanto da una velocità diretta secondo la normale a questa. Osservo che la palla si muove secondo una direzione che corrisponde a quella della diagonale del parallelogrammo costruito sulle due velocità componenti. Onde dico che ora il principio del parallelogrammo delle velocità è confermato per vero, è soddisfatto.

Ma un'altra cosa dico. Ed è che secondo la nuova meccanica la verità dev'essere considerata come tale in senso relativo ai casi che si considerano. Nel caso testè esaminato, e quando la palla fugge dall'asta, si ha che essa diventa libera e che le due velocità da cui è animata esistono realmente, veramente. Pertanto dico:

Nel caso di una massa libera, animata da due velocità che esistono realmente, la massa viene a possedere una velocità risultante, secondo la quale si muove, data dalla diagonale del parallelogrammo costruito sulle due velocità componenti.

Se, poi, le velocità componenti fossero tre o più, dovrei dire che la velocità risultante è data dal lato di chiusura della poligonale costruita sulle velocità componenti, ecc.

* * *

Il lettore che, per meglio convincersi, voglia fare l'esperienza dianzi esposta, e farla con poca spesa, può procedere così. Prenda uno di quei giocattoli detti roulette, e che costano poche lire. Lo modifichi convenientemente, come ha fatto l'autore di quest'opera, e come è rappresentato dalla unita figura.

In altre parole, fissi al piano della roulette un piccolo canale, leggermente inclinato verso il centro, ecc., e lungo il quale possa scorrere una piccola palla posta in esso.

Vedrà che la palla, quando sfugge dal canale, e passa da vincolata parzialmente a questo in libera, si muove in una direzione compresa fra la tangente alla periferia del disco e la normale. Più precisamente, secondo la direzione della diagonale del parallelogrammo costruito sulle due velocità componenti. E siccome col crescere della velocità di rotazione la componente centrifuga o normale ecc. diventa preponderante appetto alla tangenziale, vedrà che quando la velocità di rotazione è convenientemente grande la palla sfugge muovendosi pressochè nella direzione della normale alla periferia del disco. Non già secondo la tangente, come avviene nel caso della fionda.

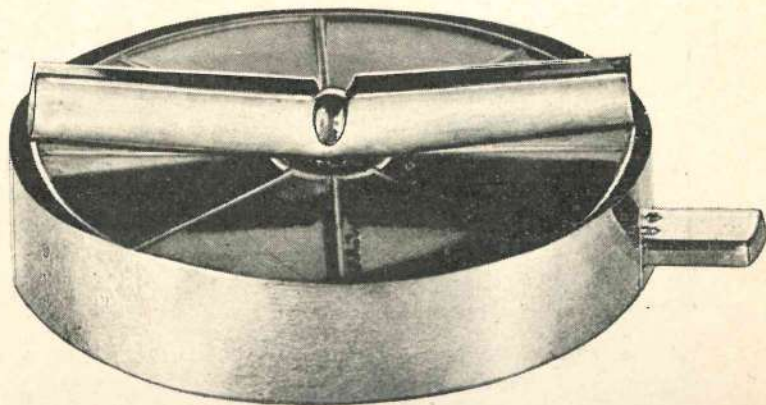



Fig. 8.

E se è vero che si tratta di un risultato di esperienza noto, essendo noto il principio del parallelogrammo delle velocità cui il risultato conduce, è altrettanto vero il dire che questo principio è stato sin qui interpretato ed inteso malamente. Perchè dovevasi e devesi non già dire che il principio è vero in generale e sempre, in senso assoluto e che non ammette eccezione, ma dire, in base ai risultati dell'esperienza, che il principio si verifica quando la massa è libera, o passa da vincolata in libera. E quando le velocità componenti sono realmente possedute dal corpo, ed esistono i relativi movimenti.

Il moto pendolare.

Tornando al moto circolare uniforme, l'uomo ha realizzato ed utilizzato un moto molto simile per mezzo del pendolo.

Considero le oscillazioni di un pendolo semplice. Il centro di massa del pendolo descrive periodicamente un archetto di circonferenza di raggio eguale alla lunghezza del pendolo. La corda che sottende l'arco è orizzontale. La forza agente è data dal peso P del pendolo, ed agisce secondo la verticale. Posso quindi dire che la forza è normale alla corda che sottende l'arco di circonferenza o traiettoria che il

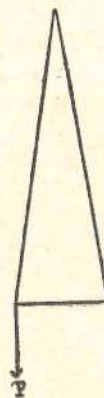



Fig. 9.

(1) Che ora non è più data dalla reazione di un corpo rigido, qual'è la corda che trattiene la fionda, ma dall'attrito tra la palla che scorre lungo le rotaie e queste rotaie.

punto materiale percorre periodicamente durante il suo movimento.

Se l'ampiezza dell'oscillazione è piccola, è di appena due o tre gradi, posso confondere, in via di approssimazione, l'arco con la corda. E dire, in questo caso, che la forza è normale, o quasi, alla traiettoria. Quindi deve aversi, con grande approssimazione, $f = f_n = P = m \frac{v^2}{r}$.

Se la forza è pressochè normale alla traiettoria il moto dev'essere analogo a quello circolare uniforme, perchè la caratteristica di questo moto è che la forza agente è normale alla traiettoria.

Indico con v la velocità costante relativa ad un moto circolare uniforme. Sia T il tempo periodico, o tempo che il punto materiale impiega a fare un giro. Il tempo T è anche quello che il punto impiega a ripassare per una stessa posizione Nel caso del pendolo questo tempo è quello che corrisponde ad una oscillazione completa, ad un moto di và e vieni. Ed in quanto nel moto circolare uniforme si ha $v = \frac{2\pi r}{T}$, posso dire che il moto del pendolo dev'essere retto da una legge analoga a quella che corrisponde ad un punto materiale che percorre periodicamente una circonferenza di raggio r eguale alla lunghezza del pendolo, e che fà un giro in un tempo T eguale a quello che corrisponde ad una oscillazione completa. Conseguentemente ho, indicando con l la lunghezza del pendolo, e ricordando che r=l:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 l}{T^2},$$ essendo T il periodo del pendolo.

Nella relazione $P = m \frac{v^2}{r}$ sostituisco a $\frac{v^2}{r}$ il valore ora dedotto, e sostituisco a P il suo valore m g. Viene

$$m g = m \times \frac{4\pi^2 l}{T^2}; \; g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}; \; T^2 = \frac{4\pi^2 l}{g}; \; T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Ed è questa, come si sà, la formola del pendolo semplice, stata trovata e dedotta da Galileo.

* * *

Per dedurre la formola $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ devesi presupporre che la forza che agisce sulla massa del pendolo sia una sola, e sia la forza di gravità o di attrazione che la Terra esercita su tale massa.

Ma non è a dirsi che sulla massa del pendolo non agiscano delle altre forze. Perchè devesi aver presente che la Terra ruota attorno a sè stessa e che si muove attorno al Sole. E quest'ultimo movimento può essere considerato come un moto di rotazione attorno al Sole.

Da tali due moti rotatori nascono quattro forze, rispettivamente normali e tangenziali alle corrispondenti traiettorie. Le quali forze sono, rispetto alla massa m di un pendolo:

La forza normale alla traiettoria, o forza centrifuga, dovuta al moto di rotazione della Terra attorno all proprio asse polare. Questa forza è massima in corrispondenza dell'equatore e và poi diminuendo via via passando dall'equatore verso i poli, col diminuire dei raggi dei paralleli terrestri. E' diretta secondo i raggi del parallelo del luogo ove il pendolo si trova, e giace nel piano di questo parallelo. Vedo qual'è il suo valore massimo all'equatore. Indico con m la massa del pendolo, con f' la forza. Ottengo, ricordando che il diametro dell'equatore è di circa 12755 Km., che la Terra fà un giro attorno a sè stessa nel tempo di 24 ore, ed assumendo come unità di lunghezza il metro, come unità di tempo il minuto secondo:

$$f' = \frac{m v^2}{r} = m r \omega^2, \text{ con } r = 6.377.500 \text{ metri} = 6.377.500;$$

$$\omega = \frac{2 \times 3{,}14}{24 \times 60 \times 60} = \frac{6{,}28}{86400}.$$

Onde $f' = m r \omega^2 = \frac{6{,}28^2 \times 6.377.500}{86400^2} m = \frac{251.518.396}{7.464.960.000} m = \frac{m}{29{,}68}$.

Confronto questa forza massima (all'equatore) con la forza di gravità, o peso P del pendolo. Ottengo $P = m g = 9{,}8$ m. E quindi $\frac{P}{f'} = \frac{9{,}8 \text{ m}}{\frac{m}{29{,}68}} = 290{,}864$; $P = 290{,}864$ f'.

Posso pertanto dire che all'equatore la forza di gravità che agisce sulla massa di un pendolo è circa 290 volte più grande della forza centrifuga dovuta alla rotazione della Terra attorno a sè stessa. Se passo poi dall'equatore verso i poli, i raggi dei paralleli terrestri diminuiscono via via, e diminuisce di conserva la forza centrifuga ecc. Così ad un raggio metà viene a corrispondere una forza centrifuga metà. E perciò una forza di gravità 2×290=580 volte più grande della centrifuga.

Passo a considerare la forza tangenziale, dovuta ancora alla rotazione della Terra attorno a sè stessa. Questa forza è zero, perchè la velocità di rotazione della Terra attorno al proprio asse polare è costante. Per conseguenza l'accelerazione tangenziale è zero. Ed è zero la corrispondente forza.

* * *

Vedo ora le forze che nascono dal movimento della Terra attorno al Sole.

Sò che la distanza media della Terra dal Sole è di circa 150.000.000 di Km. E quindi di metri 150.000.000.000.

Per il fatto che la Terra fà un giro attorno al Sole nel tempo di un anno, la velocità angolare è data da

$$\omega = \frac{6{,}28}{366 \times 24 \times 60 \times 60}.$$

Indico con f'' la forza centrifuga e normale alla traiettoria. Ho:

$$f'' = m r \omega^2 = \frac{150.000.000.000 \times 6{,}28^2}{(366 \times 24 \times 60 \times 60)^2} m = \frac{5.915.760.000.000}{999.976.181.760.000} m = \frac{m}{169{,}03},$$ con P=9,8 m. Onde $\frac{P}{f''} = \frac{9{,}8 \text{ m}}{\frac{m}{169{,}03}} = 1656{,}494$; $P = 1656{,}494$ f''.

Posso così dire ancora che rispetto ai corpi ordinari in presenza della Terra la forza centrifuga che nasce dal movimento di questa attorno al Sole è di molto più piccola e trascurabile a fronte della forza di gravità, o forza di attrazione che la stessa Terra esercita sui corpi.

Resta poi la forza tangenziale corrispondente al moto della Terra attorno al Sole. Pure questa forza è piccola e trascurabile a fronte della forza di gravità che agisce sulla massa di un pendolo. Pur non essendo zero, come nel caso della rotazione della Terra attorno a sè stessa.

Difatti, si sà che la velocità di traslazione della Terra attorno al Sole và aumentando nel periodo di tempo che trascorre tra il passaggio dalla posizione di afelio, o di maggior distanza dal Sole, alla posizione di perielio, o di minor distanza. Per contro và diminuendo nel passaggio dalla posizione di perielio a quella di afelio.

Queste variazioni di velocità sono molto piccole, rispetto al tempo. E quindi sono piccole, addirittura piccolissime le accelerazioni (1). Conseguentemente sono pure piccolissime le forze dirette secondo il movimento, o forze tangenziali alla traiettoria che a questo movimento corrisponde.

* * *

Pertanto si può dire, concludendo, che nel movimento di un pendolo le forze testè considerate sono piccole e trascura-

(1) Per avere il valor medio di questa accelerazione, quando si assume per unità di tempo il minuto secondo, si dovrebbe fare la differenza tra la velocità della Terra nelle posizioni di perielio e di afelio, e dividere poi questa differenza per il tempo di sei mesi espresso in minuti secondi. Si troverebbe che il valore di questo rapporto è piccolissimo. Tanto piccolo da poter essere, almeno in certi casi della pratica, considerato come eguale a zero e come trascurabile.

bili rispetto alla forza di gravità o peso del pendolo. Questa forza agisce nel piano di oscillazione del pendolo. Quindi si può dire che le altre forze che sul pendolo agiscono non sono capaci o sufficienti di vincere la forza di gravità, e non sono capaci, non sono sufficienti per obbligare il pendolo ad abbandonare il piano della forza di gravità, o piano di oscillazione. O quanto meno lo spostano di pochissimo e lo fanno deviare di quantità trascurabili.

Una conferma di questo risultato è data dalla nota esperienza del pendolo di Foucault. Questi, come si sa, ha fatto oscillare una palla del peso di 28 Kg., attaccandola alla sommità della cupola del Pantheon di Parigi, per mezzo di una corda lunga 67 metri. Se il piano di oscillazione di un pendolo così fatto è invariabile, o pressochè invariabile, e per il fatto che al disotto di un tal piano la Terra và ruotando attorno al proprio asse polare, la retta di intersezione fra il piano di oscillazione del pendolo ed un piano ad esso sottostante, corrispondente alla superficie terrestre, deve essere una retta non già fissa, ma mobile. La quale retta deve descrivere, su per giù, una superficie ellitica nel tempo di 24 ore.

Ed è questo che ha constatato ed accertato Foucault. (1)

* * *

Ma non è a dirsi, però, che ciò che è vero, o può essere considerato come vero, nel caso particolare dell'esperienza di Foucault è vero in generale e sempre. Come è stato detto da taluni col dire, in generale, che il piano di oscillazione o di rotazione di un pendolo è un piano invariabile.

Invero, nel caso particolare dell'esperienza del pendolo di Foucault la forza centrifuga corrispondente al moto di traslazione della Terra attorno al Sole è trascurabile a fronte di quella relativa al moto di rotazione della Terra attorno a sè stessa. E questa forza è a sua volta trascurabile a fronte della forza di gravità agente sulla massa del pendolo.

Ma si supponga di fare in modo che un corpo ruoti attorno ad un asse sorretto da una sospensione cardanica, tale che bastino delle forze piccole per spostare un tale asse. E che con lo spostarsi di quest'asse si sposti il piano di rotazione del corpo.

Può allora darsi che la forza centrifuga che nasce dalla rotazione della Terra attorno al proprio asse polare abbia ad essere la forza prevalente, preponderante. E siccome questa è una forza continua, agente in un piano normale all'asse di rotazione della Terra, e quindi secondo il parallelo del luogo, dovrebbe un tale corpo disporsi, più o meno prestamente, nel piano del parallelo.

E' questo che si verifica con la bussola giroscopica. La quale consiste in un disco circolare che viene fatto ruotare con velocità costante per mezzo di un motorino elettrico. L'asse di rotazione, normale al disco, è sorretto da una sospensione cardanica, tale che bastano delle forze piccolissime per spostarlo ed obbligarlo a disporsi nella direzione della risultante delle forze.

Il disco, per effetto della rotazione che gli viene impressa e della relativa forza centrifuga agente nel piano della rotazione, tende a mantenersi in questo piano. Ma la forza centrifuga terrestre, agente secondo rette normali all'asse di rotazione della Terra, ed agente in modo continuo, obbliga a poco a poco il disco a disporsi in un piano normale all'asse polare od asse di rotazione della Terra. Quindi nel piano del parallelo. Venendo così a fornire la direzione nord-sud. Onde il suo nome di bussola giroscopica. (2)

* * *

Questa bussola, oltre che fornire una prova della rotazione della Terra attorno a sè stessa, forse migliore e più convincente di quella del pendolo di Foucault, fornisce una prova sperimentale di un altro movimento della Terra. E precisamente del moto di rotazione di questa attorno al Sole, da ovest ad est.

Invero, per effetto di questo movimento, per il fatto che la Terra gira attorno al Sole da ovest ad est, per il fatto che la velocità del moto è leggermente variabile (in quanto va aumentando nel passaggio dalla posizione di afelio a quella di perielio, e va diminuendo nel ritorno dalla posizione di perielio a quella di afelio), si viene ad avere una forza tangenziale diretta nel senso del movimento. Diretta, quindi, da ovest ad est.

Se questa forza è libera di agire sul disco, e se la sua azione non è contrastata od impedita da forze preponderanti ed agenti in senso contrario, si viene ad avere che il disco deve ruotare nello stesso senso secondo cui la Terra ruota attorno al Sole. E perciò ruotare da ovest ad est.

E' questo, precisamente, che si verifica con la bussola giroscopica. La quale ruota sempre da ovest ad est, nel senso secondo cui girano le lancette degli orologi.

A conferma, e per togliersi ogni dubbio, si supponga di invertire, per mezzo di un commutatore, il senso della corrente elettrica che agisce nel motorino del giroscopio, e fà ruotare il disco di moto uniforme, venendo ad invertire la rotazione del motorino. Se prima il disco ruotava da ovest ad est dovrebbe ora rotare in senso inverso, e quindi da est ad ovest. Invece, e per il fatto che l'asse di rotazione è sorretto da una sospensione cardanica, per il fatto che gli attriti sono pressochè trascurabili, il disco fà un giro di 180 gradi attorno a sè stesso, e ad un suo diametro. Tornando a disporsi, dopo breve tempo, nel piano del parallelo terrestre. E girando ancora da ovest ad est.

* * *

V'è poi un altro importante rilievo da fare.

Considero il moto del giroscopio, che si muove ruotando attorno alla Terra disponendo il proprio asse di rotazione parallelamente a quello della Terra, come analogo al moto di rotazione della Luna attorno alla Terra. O della Terra attorno al Sole.

Posso allora dire che come l'asse di rotazione del giroscopio si dispone parallelamente a quello della Terra, così l'asse di rotazione della Luna deve disporsi parallelamente a quello della Terra.

L'asse di rotazione della Terra, a sua volta, deve disporsi parallelamente a quello del Sole.

Pertanto l'asse di rotazione del satellite Luna, del pianeta Terra, dell'astro Sole, devono essere paralleli, o pressochè paralleli fra di loro. Posso dire, più in generale, che tutti i corpi celesti del sistema solare devono muoversi tenendo i rispettivi assi di rotazione paralleli fra di loro, secondo un'unica e comune direzione.

E l'esperienza dice che questo è vero.

I principi della meccanica relativa all'esperienza.

Il centro di massa nel caso di corpi vincolati ad un asse o ad un centro di rotazione fissi.

Sin qui sono stati considerati, in ispecie, i casi seguenti:

a) La massa è libera, il punto di applicazione della forza coincide col centro della massa sulla quale la forza agisce, la direzione della forza e quella dello spostamento del centro di massa sono eguali.

E' questo il caso stato esaminato e studiato da Galileo, da Newton. Nel quale caso si verificano i due primi principi della meccanica di Galileo e di Newton.

Ma, come si è visto, la traiettoria dev'essere ed è rettilinea. E questo fatto basta per dire che i due primi principi della meccanica newtoniana, specie il secondo, devono considerarsi come veri non in generale e sempre, ma solo in casi particolari.

b) La massa è libera, il punto di applicazione della forza coincide ancora col centro della massa sulla quale la

---

(1) E, prima di Foucault, gli Accademici del Cimento.

(2) Il valore di una tale forza centrifuga, relativa ad un corpo di massa m, in un luogo ove il raggio del parallelo terrestre sia r, è $m r \omega^2$ con $\omega^2 = \frac{6,28^2}{86400^2} = \frac{1}{18928}$. E quindi eguale a $\frac{m r}{18928}$.

Da qui consegue che col diminuire di r, procedendo dall'equatore (ove r è massimo) verso i poli (ove r è zero), la forza centrifuga terrestre, e direttrice della bussola giroscopica, va diminuendo da un valore massimo all'equatore al valore zero ai poli. Quindi si spiega il fatto che le bussole giroscopiche debbano usarsi, nella pratica, soltanto fino alla latitudine di 80 gradi circa.

Devesi poi tener conto della velocità propria della nave, tutte le volte che è rilevante, perchè questa velocità si compone con quella della Terra attorno a sè stessa. Il che si fa per mezzo di apposite tavole, calcolate in precedenza.

forza agisce, ma la direzione della forza non coincide con quella dello spostamento.

Si sono pure considerati dei casi di masse vincolate, ma supponendo poi che il vincolo avesse a cessare a partire da un certo istante, e quindi la massa diventasse libera. O si trattasse di un vincolo sui generis, tale da poter rientrare nei casi a) e b).

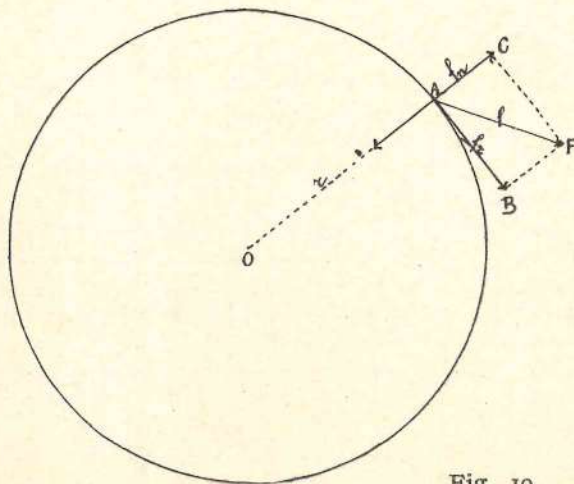
Così nel caso della fionda, la massa o palla di questa è vincolata fino a che viene trattenuta per mezzo della corda della fionda, ed obbligata a descrivere delle circonferenze di raggio r. Ma quando la corda viene abbandonata il vincolo cessa. Col cessare del vincolo si riducono a zero la forza componente f_n normale alla traiettoria, la reazione a questa componente, la reazione alla componente tangenziale. Restando, come forza libera di agire, la componente tangenziale f_τ alla traiettoria. Ed il moto avviene secondo la legge $f_\tau = m \frac{d^2s}{dt^2}$, . . . La quale rientra e può far parte dei casi a) e b).

Nel moto pendolare la massa è vincolata al centro od asse di rotazione del pendolo. Ma la direzione della forza è pressochè normale alla direzione dello spostamento. Per questo fatto la forza è retta da una legge analoga a quella della componente f_n normale alla traiettoria. Quindi rientra nel caso b).

In altri casi, poi, il vincolo non cessa come nella fionda; non è tale da potersi far corrispondere al caso di una massa libera, come avviene per il pendolo. Ma ha invece una funzione ed importanza preponderanti, principali.

Così in quasi tutte le macchine usate dall'uomo per i suoi bisogni avviene un moto di masse vincolate ad un centro o ad un asse di rotazione fissi rispetto alla Terra e rigidi. Il corpo è costretto a descrivere periodicamente delle circonferenze il cui centro appartiene all'asse od al centro di rotazione.

Questo vincolo, in quanto corrisponde al caso che per l'uomo è il più importante, dev'essere oggetto di un particolare esame. E non è a dirsi che si può scansare questa fatica col pensare che esso deve rientrare e far parte dei casi a) e b). Più precisamente dire, come è stato detto e si dice nella meccanica Newtoniana, che il caso di una massa comunque vincolata può essere conglobato nel caso a), cui corrisponde la formola $f = m\,a = m \frac{d^2s}{dt^2}$, perchè questa formola esprime il secondo principio fondamentale della meccanica di Galileo e di Newton. Ed il principio deve considerarsi come generalmente e sempre vero . . .

Per convincersi che il dir questo non è generalmente vero basta rilevare che per la formola $f = m\sqrt{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}}$ si ha $f = m \frac{d^2s}{dt^2}$ soltanto quando $\frac{v^4}{r^2} = o$; $r = \infty$, e la traiettoria è rettilinea. Se quando si verifica la relazione $f = m \frac{d^2s}{dt^2}$ la traiettoria è rettilinea, non può di certo dirsi che essa deve verificarsi ancora quando la traiettoria è, per ipotesi, una circonferenza od una serie di circonferenze che vengono percorse attorno ad un centro o ad un asse fissi.

* * *

Del pari non posso dire a priori, e non è vero il dire, che deve verificarsi la relazione $f = m\sqrt{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}}$ con $f^2 = f_\tau^2 + f_n^2$; $f_\tau = m\,a_\tau = m \frac{d^2s}{dt^2}$; $f_n = m\,a_n = m \frac{v^2}{r}$, essendo f_τ e f_n le componenti della forza f agente sul corpo, secondo la tangente e la normale alla traiettoria, ed a_τ, a_n le relative accelerazioni.

Invero, sia O un centro od asse di rotazione rigido e fisso, ed A il centro di massa di un corpo connesso con l'asse O. In virtù di questo legame, il corpo sia obbligato a muoversi descrivendo delle circonferenze di centro O e raggio O A = r. (vedi fig. 10).

Sia A F = f la forza che agisce sul corpo, determinando il moto di rotazione e circolare attorno ad O. Decompongo la forza A F in due componenti f_n e f_τ rispettivamente normali e tangenziali alla circonferenza ecc. nel punto A.

Posso dire:

La linea di azione della componente $A\,C = f_n$ normale alla traiettoria passa per il centro od asse O di rotazione. E siccome questo, per ipotesi, è rigido e fisso, deve contrapporre una reazione eguale e contraria. In virtù di questa reazione è come se la componente f_n fosse ridotta a zero.

Resta così, come sola forza effettivamente agente, la componente tangenziale f_τ. Onde si ha $f^2 = f_\tau^2 + f_n^2$ con $f_n = O$. Quindi $f^2 = f_\tau^2$; $f = f_\tau$. E siccome $f_\tau = m \frac{d^2s}{dt^2}$, verrebbe ancora $f = m \frac{d^2s}{dt^2}$. (1)

Fig. 10.

(1) Si può anche dire:

Nel moto circolare esiste certamente la forza centrifuga e normale alla traiettoria $f_n = m \frac{v^2}{r}$, cui compete l'accelerazione $a_n = \frac{v^2}{r}$.

Ma se il moto avviene attorno ad un asse di rotazione fisso e rigido, alla forza centrifuga $m \frac{v^2}{r}$ deve corrispondere una reazione eguale e direttamente contraria, detta forza centripeta, dovuta alla reazione del vincolo rappresentato dal centro od asse fisso di rotazione.

Questa forza, o reazione centripeta, è eguale e contraria alla $f = m \frac{v^2}{r}$. Quindi è eguale a $-m \frac{v^2}{r}$. Ed in quanto la massa m rappresenta una quantità essenzialmente positiva, ed il cui segno non varia, così l'accelerazione relativa è data da $-\frac{v^2}{r}$.

L'accelerazione totale e risultante nella direzione del raggio della circonferenza in un punto A, cioè della normale alla traiettoria in A, è data dalla somma delle accelerazioni relative alla forza centrifuga ed alla reazione del vincolo o forza centripeta. Quindi è eguale a $\frac{v^2}{r} - \frac{v^2}{r} = o$. Questa accelerazione zero rappresenta ed è l'accelerazione totale e vera a_n in direzione normale alla traiettoria. Si ottiene così $a_n = o$.

Nella formola $f = m\sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = m\sqrt{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2}$ l'espressione $\frac{v^2}{r}$ rappresenta l'accelerazione a_n normale alla traiettoria nel caso di una massa libera. Questa è, nel caso in esame di una massa vincolata ad un asse di rotazione ed a causa del vincolo, data da $\frac{v^2}{r} - \frac{v^2}{r} = o$. Onde si ottiene

$$f = m\sqrt{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{r} - \frac{v^2}{r}\right)^2} = m \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Ma se fosse questa la relazione che si verifica, quando si supponga che la massa sia libera, la traiettoria dovrebbe essere rettilinea. Il che non può essere, nel caso in esame, perchè per ipotesi è circolare. Quindi ecc.

Non potendo pertanto dire, e tanto meno dire a priori, che devono verificarsi nè la relazione $f = m\ a = m \dfrac{d^2s}{dt^2}$ nè la $f = m\ a_f = m \sqrt{\left(\dfrac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \dfrac{v^4}{r^2}}$, è mestieri ricorrere alla esperienza, per veder quello che dice.

* * *

Prima di far questo, però, conviene chiarire bene le idee nei riguardi del concetto di centro di massa di un corpo. E veder anche qual'è, nella pratica, il modo più semplice e più comodo per determinare l'effetto dell'azione di una forza, od accelerazione, e la corrispondente velocità.

E ciò conviene fare, nei riguardi del centro di massa di un corpo, perchè nella meccanica detta razionale si deduce che il centro di massa di un corpo è rappresentato dal centro di gravità del corpo. Perchè, si dice, questo centro è un punto nel quale la massa del corpo si può immaginare concentrata.

Il dir questo in taluni casi è vero. E' vero, ad esempio, nella caduta verticale e libera dei gravi. Ma sarebbe un errore, ed in taluni casi grave errore, il dire che è vero in generale e sempre.

Col far questo si viene non a dire una verità, ma a cadere nelle tante volte rilevato errore di pretendere che ciò che è vero in taluni casi particolari debba essere vero in senso assoluto, generale.

In verità, devesi dire soltanto che il centro di massa di un corpo è un punto nel quale la massa del corpo si può immaginare concentrata. Vedere poi volta per volta, caso per caso, qual'è il punto che soddisfa a tale condizione. E vederlo in base ai risultati dell'esperienza.

Ed allora dico:

* * *

Suppongo di avere un'asta M N rigida e di acciaio, convenientemente sottile, mobile attorno ad un asse di rotazione O, rigido e fisso.

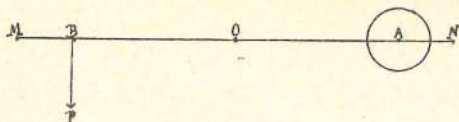



Fig. 11.

In un primo tempo fisso l'estremo N dell'asta, e poi infilo in questa, tra O ed N, una sfera di peso P e massa m, per modo che il suo centro C cada sull'asta, nel punto A.

In questo caso se si indica con G il centro di gravità della sfera, il centro di gravità G coincide col centro della sfera. Ed in quanto il centro C cade in A, ed A appartiene all'asta, posso dire, ed è vero il dire, che il centro di massa del corpo è rappresentato da A. Che il centro di massa coincide col centro di gravità.

Posso inoltre dire:

Chiamo col nome di raggio d'inerzia di una massa m di centro A, rispetto ad un asse o ad un centro di rotazione, la distanza tra il centro di massa e l'asse di rotazione. Se tale raggio d'inerzia lo indico con r, ho, nel caso in esame, $r = O\ A$.

Applico all'asta, dall'altra parte dell'asse O di rotazione, un corpo di peso eguale ancora a P (cioè eguale al peso della palla o sfera), in un punto B tale da avere $O\ B = O\ A = r$.

Se fo questo, e lascio poi l'asta libera di ruotare attorno ad O, osservo che l'asta resta in equilibrio, che non si muove. E questo fatto mi conferma che sono eguali non solo le masse applicate in A e B, ma anche i loro raggi d'inerzia. Perchè nel caso di masse eguali e di diversi raggi d'inerzia dovrei avere dei momenti di rotazione diversi. E l'asta non potrebbe essere e stare in equilibrio.

* * *

Immagino di spostare il corpo di peso P e massa m applicato in A, facendolo poi agire, nella sua nuova posizione, sull'asta M N. E di fare ciò tenendo invariato il peso P applicato in B alla distanza $B\ O = r$ dall'asse di rotazione O.

Se nella nuova posizione del corpo prima applicato in A il raggio d'inergia, rispetto ad O, è variato, se è aumentato o diminuito, l'equilibrio non lo ho più. Perchè essendo eguali le masse, ad un aumento del raggio d'inerzia deve corrispondere un aumento del momento di rotazione rispetto ad O. Ed in questo caso l'asta ruota dalla parte della nuova posizione del corpo prima applicato in A.

Se invece è diminuito, il movimento ha luogo dalla parte del corpo applicato in B. Perchè è da questa parte che si viene ad avere il momento maggiore.

Posto ciò, suppongo che la palla di peso P, il cui centro di gravità prima cadeva in A, venga ancora fissata al punto A, ma per mezzo di un filo di seta il più corto possibile, di peso trascurabile, e per modo che il punto di attacco alla palla appartenga alla superficie esterna della sfera. Come è rappresentato nella figura 12.

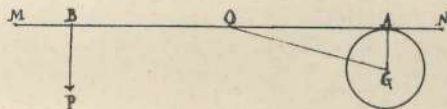



Fig. 12.

Ora il centro di massa, che prima era rappresentato dal punto A, non coincide più col centro di gravità G della sfera o palla, sorretta dall'asta nel punto A. Debbo perciò chiedermi: qual'è, dei due punti, il centro di massa? E' il centro di gravità G, o centro della sfera, come da molti è stato detto e si dice?

Per convincermi di no, osservo che se, nel caso in esame, il centro di massa fosse il centro di gravità G, il raggio d'inerzia rispetto ad O sarebbe dato da O G.

Suppongo, per semplificare, che l'asta O A, quando è trattenuta, sia disposta orizzontalmente. Per il fatto che G A appartiene alla verticale condotta per il centro di gravità G, ecc. posso dire che il triangolo O A G è rettangolo in A. Che quindi deve risultare $O\ G = \sqrt[2]{O\ A^2 + A\ G^2}$.

Od anche, ricordando che $O\ A = O\ B = r$ e ponendo $A\ G =$ raggio della sfera $= \rho$; $O\ G = \sqrt[2]{r^2 + \rho^2}$.

Osservo che $r^2 + \rho^2 > r^2$; $\sqrt[2]{r^2 + \rho^2} > r$. Quindi $O\ G > r$. Cioè nella nuova posizione della sfera o palla il suo raggio d'inerzia O G rispetto ad O dovrebbe essere aumentato.

Perciò se applico ancora in B un corpo di peso P alla distanza $B\ O = O\ A = r$, dovrei dire che il momento di rotazione è maggiore dalla parte di A. Perchè ad eguali masse e ad un maggiore raggio d'inerzia corrisponde un maggior momento di rotazione. E quindi il sistema, quando è lasciato libero, dovrebbe ruotare dalla parte di A.

Invece vedo che stà fermo, che resta in quiete, come quando la palla era infilata nell'asta, ed il suo centro di gravità G cadeva in A.

Da questo fatto debbo necessariamente inferire che il momento di rotazione della sfera o palla rispetto ad O non è variato. Ed in quanto pure la massa non ha variato, debbo dire che il raggio d'inerzia è rimasto quello di prima. Perciò se prima era eguale ad $O\ A = r$ sarà ancora questo il raggio d'inerzia. E sarà ancora A, necessariamente, il centro di massa.

E non già, e sempre nel caso in esame, il centro di gravità G.

* * *

Considero quest'altro esempio o caso. Prendo un filo di seta, di peso ancora trascurabile, e ne fisso un estremo al

punto A, l'altro estremo al punto D della superficie sferica ed esterna che delimita la palla.

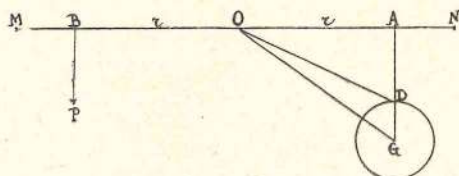



Fig. 13.

Ora il punto di attacco della sfera col filo o cordicella, che nel caso della figura 12 coincideva col punto A, e corrispondeva al centro di massa, non cade più in A. Ho che i punti A, D, G, hanno la proprietà comune di appartenere alla verticale passante per il centro di gravità G. Ma quanto al centro di massa debbo chiedermi: Qual'è, nel caso in esame, dei tre punti A, D, G, il centro di massa?

Per rispondere a questa domanda osservo che se il centro di gravità G fosse, nel caso in esame, il centro di massa, il raggio d'inerzia della massa sarebbe dato da O G. Ed in quanto O G è maggiore di r, dovrei dire che nella nuova posizione della sfera o palla il suo raggio d'inerzia rispetto ad O è aumentato. Di molto aumentato.

Quindi se applico ancora in B un corpo di peso P con O B=O A=r, ecc. dovrei osservare che quando il sistema è lasciato libero dovrebbe avvenire una rotazione dalla parte della palla, dalla parte di A.

L'esperienza dice che questo non è vero, e che il sistema resta in equilibrio come prima, come nei casi delle figure 11 e 12. Onde dico che non è vero, sempre nel caso in esame, che il centro di gravità G sia il centro di massa. Analogamente trovo che non è vero il dire che il punto di attacco D della cordicella con la sfera è il centro di massa. Per quanto lo sia nel caso della figura 12 ed in altri casi. Come quello della fionda.

Perchè se D fosse il centro di massa, il raggio d'inerzia di questa rispetto ad O sarebbe dato da D O. E siccome D O è maggiore di r, dovrei ottenere ancora una rotazione dalla parte di A. Mentre ottengo, invece, un sistema in equilibrio.

Se il sistema resta in equilibrio, se non ruota nè dalla parte di A, nè da quella di B, debbo dire che il raggio di inerzia è rimasto immutato. Perciò se prima era O A sarà ed è ancora O A. E sarà ancora A il centro di massa.

* * *

Osservo che A è il punto d'incontro fra l'asta ruotante attorno ad O e la verticale che passa per il centro di gravità G del corpo. Onde dico:

Nel caso di un'asta rigida ruotante attorno ad un centro o ad un asse di rotazione, pure rigido e fisso, il centro di massa di un corpo solidale o collegato con l'asta non è il centro di gravità del corpo, ma è invece il punto di incontro fra l'asta e la normale passante per il centro di gravità del corpo.

* * *

A questa deduzione si può anche giungere ragionando così:

Un'asta rigida sia mobile attorno ad un asse o punto fisso O. Applico in un punto A dell'asta rigida un corpo di peso P e massa m, sospendendolo al punto A per mezzo di un filo di seta od in altro conveniente modo.

Sia G il centro di gravità del corpo, o punto di applicazione della forza corrispondente al suo peso P. Per

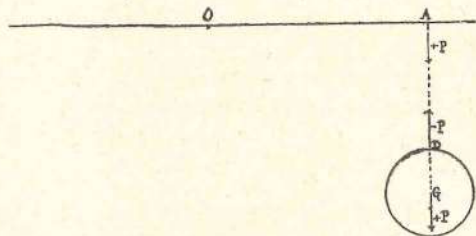



Fig. 14

effetto di questa forza il corpo tende a cadere verso la Terra. Ma il filo resiste e se non si rompe reagisce, contrapponendo una forza eguale e contraria $-P$, avente per punto di applicazione il punto di attacco del filo al corpo di massa m. Se l'asta è rigida, pure alla forza $-P$ corrisponde una reazione eguale e contraria; quindi eguale a $+P$, avente per punto di applicazione il punto A di attacco del filo all'asta. Si può così dire che è come se la forza o peso P fosse trasportata ad agire dal centro di gravità G nel punto A; come se invece di agire nel punto G agisse in A. E del pari dire che la massa del corpo invece che concentrata nel centro di gravità G può essere immaginata concentrata nel punto A.

In quanto il centro d'inerzia dev'essere un punto nel quale la massa si può immaginar concentrata, posso dire che è A il centro d'inerzia. Che è A O il raggio d'inerzia rispetto all'asse di rotazione O, o distanza fra il centro d'inerzia, o di massa, e l'asta.

Questo modo di ragionare e di procedere viene fatto ed è ammesso anche in talune parti della vecchia meccanica e fisica.

La legge del moto dei corpi vincolati ad un asse o ad un centro di rotazione rigido e fisso.

Da quanto si è visto e rilevato consegue che la caratteristica del moto di un corpo vincolato ad un asse o ad un centro di rotazione rigido e fisso (rispetto alla Terra) è che la componente normale alla traiettoria, detta forza centrifuga, è elisa dalla reazione del vincolo. La quale reazione, contrapponendo una forza centripeta eguale e contraria alla centrifuga, fa sì che la forza risultante normale alla traiettoria si riduce a zero.

V'è poi una domanda di grande importanza da farsi, nei riguardi dei moti di rotazione attorno ad un asse o ad un centro rigido e fisso. Ed è che in tali moti la forza agisce sempre con un certo braccio di leva rispetto all'asse od al centro di rotazione. Intendendo per braccio di leva di una forza rispetto ad un asse la distanza fra la linea di azione della forza e l'asse, ecc. E quando il braccio di leva si riduce a zero il moto di rotazione si riduce pure a zero.

Secondo Newton l'effetto dell'azione di una forza è indipendente dal suo braccio di leva. Difatti, Newton non considera un tale braccio, come se ad esso non competesse alcuna funzione, alcuna importanza. Del che si ha una conferma nel fatto che la espressione analitica del secondo principio della meccanica Newtoniana, o formola $f=m\,a$, non contiene il braccio di leva. Venendosi così ad avere che l'effetto dell'azione di una forza, od accelerazione che acquista la massa sulla quale la forza agisce, dovrebbe essere indipendente dal braccio di leva. Che quindi non dovrebbe variare col variare di questo braccio.

Secondo Galileo si dovrebbe invece dire che col crescere (o col diminuire) del braccio di leva di una forza rispetto ad un centro o ad un asse di rotazione, cresce (o diminuisce), sì, la resistenza o forza che si può vincere, ma che quel che si guadagna (o si perde) in resistenza o forza che si vince lo si deve perdere (o guadagnare) in velocità ed in tempo. Più precisamente, che col crescere, poniamo, del braccio di leva di una forza deve diminuire la velocità angolare e crescere il tempo. Per modo, e come dice Galileo, che ad un braccio di leva n volte più grande di una data forza dovrebbe corrispondere una velocità angolare n volte più piccola ed un tempo n volte più grande.

* * *

Quanto al risultato cui perviene Galileo è da rilevarsi che Egli lo ottiene con lo ammettere o presupporre che nelle macchine semplici gli spazi stiano fra di loro come i tempi, che quindi il moto sia uniforme. Venendo così a cadere in quella cagion d'errore stata proprio da Galileo rilevata, e giustamente rilevata, nei riguardi della meccanica di Aristotile. E come Aristotile è caduto in errore con lo estendere, poniamo, la legge del moto uniforme al moto diverso della caduta libera dei gravi, ed ai moti naturali in genere, così può darsi che ragionando e procedendo in modo analogo, con lo ammettere per generalmente vero un presupposto che tale non è, sia caduto in errore Galileo.

Quanto a Newton, è da rilevarsi che egli estende sen-

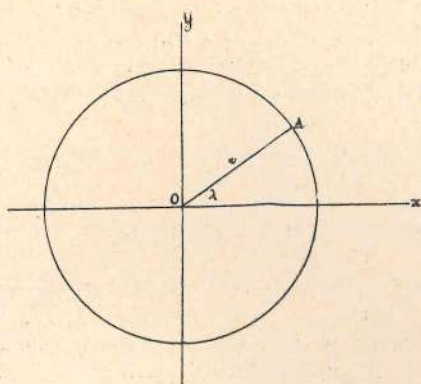



Fig. 15.

z'altro il risultato da Lui ottenuto nel caso di una massa libera, e quando il punto di applicazione della forza coincide col centro della massa sulla quale la forza agisce, nel qual caso non si ha braccio di leva della forza rispetto al centro di massa, al caso ben diverso in cui questo braccio invece lo si ha.

Dovevasi e devesi invece esaminare questo caso a sè, solo ammettendo che il risultato prima ottenuto debba verificarsi e corrispondere al vero nel caso stato esaminato. E non già in generale e sempre.

E' da vedersi, pertanto, il risultato che s'ottiene nel caso di una forza agente con braccio di leva rispetto ad un asse di rotazione, e di massa legata a quest'asse.

* * *

Il centro di massa di un corpo sia invariabilmente connesso con un asse di rotazione, che suppongo essere normale al piano del foglio nel punto O.

In virtù e per effetto di questo legame o vincolo, il corpo non può descrivere che delle circonferenze di centro O. Sia r il raggio costante di queste circonferenze.

Riferisco il movimento del corpo a due assi cartesiani ortogonali di origine O.

Ad un certo istante o tempo t il centro di massa del corpo si trovi nella posizione A. Indico con λ l'angolo che il raggio O A=r fa con l' asse delle x. Ho $x=r\cos\lambda$; $y=r\,\text{sen}\,\lambda$, con r costante. Onde $dx=-r\,\text{sen}\,\lambda\,d\lambda$;

$$dy=r\cos\lambda\,d\lambda;\qquad \frac{dx}{dt}=-r\frac{d\lambda}{dt}\text{sen}\,\lambda;\qquad \frac{dy}{dt}=r\frac{d\lambda}{dt}\cos\lambda;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-r\frac{d^2\lambda}{dt^2}\text{sen}\,\lambda-r\frac{d\lambda}{dt}\frac{d\,\text{sen}\,\lambda}{dt}=-r\frac{d^2\lambda}{dt^2}\text{sen}\,\lambda-$$

$$-r\frac{d\lambda}{dt}\cos\lambda\frac{d\lambda}{dt}=-r\frac{d^2\lambda}{dt^2}\text{sen}\,\lambda-r\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2\cos\lambda;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=r\frac{d^2\lambda}{dt^2}\cos\lambda+r\frac{d\lambda}{dt}\frac{d\cos\lambda}{dt}=r\frac{d^2\lambda}{dt^2}\cos\lambda-$$

$$-r\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2\text{sen}\,\lambda.$$

* * *

Ora, e come si sà, l'angolo λ viene misurato dalla lunghezza dell'arco di circonferenza di raggio uno avente per centro il vertice dell'angolo, che nel caso in esame è il punto O, e che è tagliato e delimitato dai due lati dell'angolo. Perciò $\frac{d\lambda}{dt}$ è la velocità di un punto alla distanza uno dal centro od asse O di rotazione. Ed è quella che si è convenuto di chiamare velocità angolare.

Indico con ω questa velocità. Cioè pongo: velocità angolare $=\omega=\frac{d\lambda}{dt}$.

L'accelerazione angolare, od accelerazione di un punto alla distanza uno dal centro od asse di rotazione, è poi data da $\frac{d}{dt}\frac{d\lambda}{dt}=\frac{d^2\lambda}{dt^2}=\frac{d\omega}{dt}$.

E rappresentando con α l' accelerazione angolare, da $\alpha=\frac{d^2\lambda}{dt^2}=\frac{d\omega}{dt}$.

Sostituendo ho

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=-r\dfrac{d^2\lambda}{dt^2}\text{sen}\,\lambda-r\left(\dfrac{d\lambda}{dt}\right)^2\cos\lambda=-r\,\alpha\,\text{sen}\,\lambda-r\,\omega^2\cos\lambda\\[2ex]\dfrac{d^2y}{dt^2}=r\,\alpha\cos\lambda-r\,\omega^2\,\text{sen}\,\lambda\end{cases}$$

Ed elevando a quadrato e sommando:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2=r^2\alpha^2\,\text{sen}^2\,\lambda+2r^2\alpha\,\omega^2\,\text{sen}\,\lambda\cos\lambda+$$

$$+r^2\omega^4\cos^2\lambda+r^2\alpha^2\cos^2\lambda-2r^2\alpha\,\omega^2\,\text{sen}\,\lambda\cos\lambda+r^2\omega^4\,\text{sen}^2\,\lambda=$$
$$=r^2\alpha^2(\text{sen}^2\,\lambda+\cos^2\lambda)+r^2\omega^4(\text{sen}^2\,\lambda+\cos^2\lambda)=r^2\alpha^2+r^2\omega^4.$$

Se il centro della massa m è alla distanza r dall'asse di rotazione, come qui si presuppone, la sua velocità v dev'essere r volte quella di un punto alla distanza uno dall'asse. Cioè v dev'essere r volte la velocità angolare ω. Onde viene $v=r\,\omega$; $r^2\omega^4=\frac{r^4\omega^4}{r^2}=\frac{v^4}{r^2}$.

Del pari se si indica con $a=\frac{d^2s}{dt^2}$ l'accelerazione tangenziale del punto materiale, e se questo punto è alla distanza r dall'asse, dev'essere a=r volte l'accelerazione angolare $a=r\,\alpha$; $r^2\alpha^2=a^2=\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2$

Pertanto posso dire che

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2=r^2\alpha^2+r^2\omega^4=a^2+\frac{v^4}{r^2}=\left(\frac{ds^2}{dt^2}\right)^2+\frac{v^4}{r^2}.$$

* * *

Si è visto che se nel caso di una massa libera, il cui centro descriva una traiettoria qualsiasi per l'azione di una forza f, si decompone la forza in due componenti secondo la tangente alla traiettoria e normalmente a questa, alla componente tangenziale corrisponde un'accelerazione eguale a $\frac{d^2s}{dt^2}=a_T=a$. E siccome, nel caso in esame, ho $a=r\,\alpha$, posso dire che $r\,\alpha=a_r$. Dire, cioè, che $r\,\alpha$ rappresenta un'accelerazione diretta secondo la tangente geometrica alla traiettoria, nel punto che si considera.

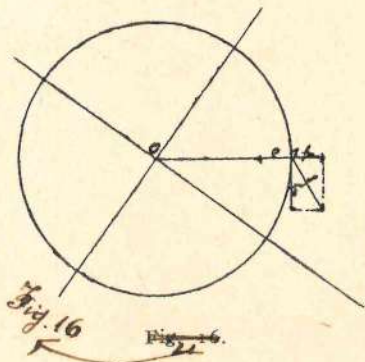
Del pari, si è visto che l'accelerazione a_n normale alla traiettoria è data da $a_n=\frac{v^2}{r}$. E siccome $r\,\omega^2=\frac{r^2\omega^2}{r}=\frac{v^2}{r}$, posso dire che $r\,\omega^2=a_n$.

Ho così $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2=r^2\alpha^2+r^2\omega^4=(r\,\alpha)^2+(r\,\omega^2)^2=a_T^2+a_n^2$.

* * *

Pertanto posso dire:

Sia f la forza che agisce sul punto materiale mobile, allorchè questo è nella posizione o punto A della circonferenza di centro O e raggio r, che periodicamente descrive. Ed il punto materiale sia invariabilmente connesso col centro od asse di rotazione O. Sia, ad esempio, legato ad O per mezzo di un'asta rigida di acciaio.

Decompongo la forza f in due componenti f_τ e f_n, rispettivamente secondo la tangente in A alla circonferenza ecc. e normalmente ad essa. Alla componente f_τ corrisponde

l'accelerazione $a_\tau = a = r\,\alpha$. Alla componente f_n corrisponde l'accelerazione $a_n = \frac{v^2}{r} = r\,\omega^2$.

La forza componente f_n agente secondo il raggio O A e da O verso A, tende ad allontanare il punto materiale mobile dal centro od asse di rotazione O. Ma questo allontana-

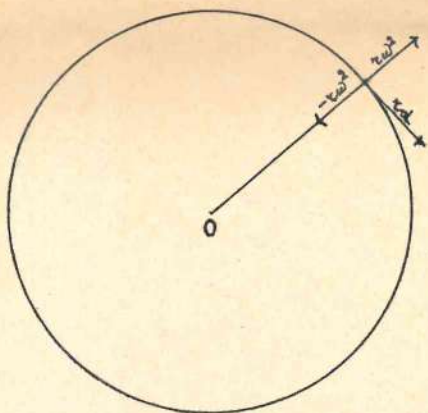



Fig. 17.

mento non può aver luogo, in virtù del legame o vincolo che passa fra O ed A In virtù, ad esempio, dell'asta rigida che collega O con A. Ed affinchè l'allontanamento non si verifichi, bisogna necessariamente che quest'asta elida, annulli la forza componente f_n contrapponendo ad essa una forza, una reazione eguale e contraria.

Indico con ρ una tal reazione. Per il fatto che essa dev'essere eguale e contraria a f_n, pure l'accelerazione relativa dev'essere eguale e contraria. E perciò dev'essere eguale a $-\frac{v^2}{r} = -r\,\omega^2$

Ho così che in corrispondenza del punto A della circonferenza ecc. si devono avere tre accelerazioni. E cioè:

Un'accelerazione diretta secondo la tangente in A alla circonferenza, eguale ad $a = \frac{d^2s}{dt^2} = r\,\alpha$. Ed alla quale accelerazione corrisponde una forza f_τ diretta nella direzione della tangente, nella direzione dello spostamento.

Un'accelerazione a_n normale alla traiettoria in A, diretta da O verso A, tendente ad allontanare il punto materiale dal centro O della circonferenza. La cui corrispondente forza è perciò stata chiamata centrifuga. E la cui accelerazione è eguale a $\frac{v^2}{r} = r\,\omega^2$.

Un'accelerazione eguale e contraria alla precedente, quindi di eguale a $-\frac{v^2}{r} = -r\,\omega^2$. E cui corrisponde una forza o reazione ρ diretta da A verso O, verso il centro della circonferenza che il punto materiale percorre. E che per questo si suol chiamare forza o reazione centripeta.

Per il fatto che l'accelerazione centrifuga $a_n = \frac{v^2}{r} = r\,\omega^2$ e la centripeta $-\frac{v^2}{r} = -r\,\omega^2$ sono eguali e contrarie, posso dire che esse rinvengono ad una accelerazione eguale a $\frac{v^2}{r} - \frac{v^2}{r} = o$. Che quindi l'accelerazione risultante relativa al sistema di forze che si hanno in corrispondenza del punto A si riduce alla $r\,\alpha = \frac{d^2s}{dt^2} = a$.

Quanto alle forze del sistema, esse sono la f_τ agente secondo la tangente alla traiettoria, la f_n che agisce normalmente alla traiettoria da O verso A, e la reazione eguale e contraria ρ del vincolo, diretta da A verso O. E siccome queste due forze si elidono, equivalgono ad una forza zero, posso dire che la forza risultante delle forze agenti in A, e corrispondenti tanto all'azione della forza f che alla reazione del vincolo, è data dalla forza tangenziale $f_\tau = m\,a_\tau = m\,a = m\,r\,\alpha$, diretta nella stessa direzione e senso della corrispondente accelerazione tangenziale $a_\tau = a$. E dove r rappresenta la distanza fra il centro di massa e l'asse di rotazione, ed è perciò quella grandezza che si è convenuto di chiamare col nome di raggio d'inerzia della massa m rispetto all'asse.

* * *

Nel caso ora esaminato si è supposto che il punto di applicazione della forza coincidesse col centro della massa sulla quale la forza agisce. E che il braccio di leva della forza ed il raggio di inerzia della massa sulla quale la forza agisce fossero eguali, eguali ad r.

Ma nel caso di masse vincolate ad un centro o ad un asse di rotazione fissi questa eguaglianza non si verifica pressochè mai.

Invero, si supponga che una forza f tenda un filo passante per la gola di una carrucola, facendo girare quest'ultima, ed agendo tangenzialmente alla carrucola. Indico con R il raggio di questa carrucola, con b il braccio di leva della forza, rispetto all'asse di rotazione, con r il raggio d'inerzia della carrucola rispetto allo stesso asse. Il braccio b di leva della forza è eguale al raggio R della carrucola, cioè b = R. Il raggio d'inerzia della carrucola è eguale a 2/3 di R. (1). Onde $r = \frac{2}{3}R$. Quindi il braccio b di leva, ecc. è diverso dal raggio d'inerzia r.

---

(1) Si voglia determinare l'inerzia di una carrucola semplice, la cui gola sia di raggio R. Indico con m la massa della carrucola; r il suo raggio d'inerzia rispetto all'asse di rotazione; σ lo spessore della carrucola; δ la densità di questa, o peso per unità di volume; g, al solito, l'accelerazione della gravità.

Considero un piccolissimo anello circolare della carrucola, compreso fra le due circonferenze di raggi R e R+d R. Ho:

Considero il caso di un'asta rigida O A mobile attorno ad un asse di rotazione O e connessa con quest'asse. Indico con m la massa dell'asta, con l la sua lunghezza, con r il suo raggio d'inerzia rispetto ad O. Ho che $r = \frac{l}{2}$ (2). Suppongo, per fissare le idee, che il punto di applicazione della forza appartenga all'asta, e che la forza agisca normalmente all'asta.

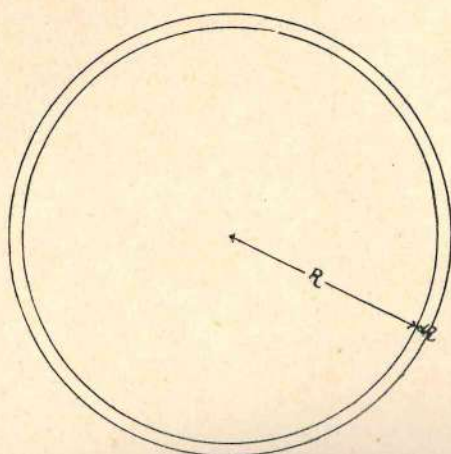



Fig. 18.

Ho allora che il braccio b di leva della forza è eguale alla distanza fra il suo punto di applicazione e l'asse O, distanza che può variare da zero ad l. Mentre il raggio di inerzia della massa sulla quale la forza agisce è costante, è eguale a $\frac{l}{2}$. Onde dico che il braccio di leva della forza è eguale al raggio d'inerzia della massa sulla quale agisce solo nel caso particolare in cui il punto di applicazione della forza coincide col punto di mezzo dell'asta.

Se poi le aste sono due, rigidamente connesse tra di loro per modo da formare un'asta unica, come si verifica nella leva, e questa serve per sollevare o spostare dei pesi, per vincere delle resistenze ecc., l'eguaglianza tra il braccio di leva della forza ed il centro di inerzia della massa (o delle masse) sulla quale (o sulle quali) la forza agisce non si verifica più neanche nel caso particolare in cui il punto di applicazione della forza coincide col punto di mezzo della corrispondente asta.

Tralascio di citare altri esempi, anche perchè sarebbe un'offesa per il lettore supporre che non sappia che nei moti di masse vincolate ad un centro o ad un asse di rotazione il punto di applicazione della forza non coincide mai, o pressochè mai, col centro d'inerzia della massa sulla quale la forza agisce.

Debbo pertanto considerare il caso in cui, come avviene quasi sempre nella pratica, tali punti sono diversi e distinti.

Suppongo, adunque, che una forza f agisca sopra un corpo di massa m vincolato ad un asse O di rotazione rigido e fisso, essendo il punto di applicazione della forza diverso e distinto da quello del centro della massa sulla quale la forza agisce. Ed essendo la forza comunque diretta. Quindi la direzione della forza diversa da quella dello spostamento del centro di massa.

Siano:

A il centro della massa m sulla quale la forza agisce;

O A = r il raggio d'inerzia della massa m rispetto all'asse di rotazione, o distanza del centro di massa dall'asse;

B il punto di applicazione della forza f = B C, essendo A e B due punti invariabilmente connessi con l'asse di rotazione, e che suppongo appartenere ad un'asta rigida, di acciaio, collegante invariabilmente fra di loro i punti O, A, B.

Decompongo la forza f in due componenti, una delle quali parallela alla tangente alla traiettoria o circonferenza descritta dal centro di massa, o circonferenza di centro O e raggio O A = r, che indico con B D, e l'altra diretta secondo O A B. Sia B E questa componente.

Per il fatto che la componente B E tende ad allontanare il punto B da O, ed il punto B è invariabilmente connesso con O, per mezzo dell'asta rigida, quest'asta deve contrap-

---

Volume del piccolissimo anello $= 2\pi R \times dR \times \sigma = 2\pi\sigma R\, dR$.

Peso piccolissimo anello $= 2\pi\sigma R\, dR \times \delta = 2\pi\delta\sigma R\, dR$.

Massa piccolissimo anello $= \frac{\text{Peso anello}}{g} = \frac{2\pi\delta\sigma}{g} R\, dR$.

Questa massa corrisponde al differenziale d m della massa m di tutta la carrucola. Onde $dm = \frac{2\pi\delta\sigma}{g} R\, dR$.

L'inerzia di questa massa, alla distanza R dall'asse di rotazione, è R d m. Tutta l'inerzia è data da $\int_0^R R\, dm$.

Questa inerzia è anche data da m r, se con m indico la massa della carrucola e con r il suo raggio d'inerzia. Perciò dev'essere

$$m r = \int_0 \frac{2\pi\delta\sigma}{g} R\, dR \times R = \frac{2\pi\delta\sigma}{g} \int_0^R R^2\, dR = \frac{2\pi\delta\sigma}{g} \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{2\pi\delta\sigma}{3g} R^3.$$

Osservo che $m = \frac{\pi R^2 \times \sigma \times \delta}{g}$. Viene così, sostituendo, $\frac{\pi R^2 \delta\sigma}{g} \times r = \frac{2\pi\delta\sigma}{3g} R^3$; $r = \frac{2}{3} R$.

(2) Siano: m la massa dell'asta mobile attorno ad O; r il suo raggio d'inerzia rispetto ad O; l la sua lunghezza o distanza fra il

Fig. 19.

suo estremo O (in corrispondenza del quale si trova l'asse di rotazione) e l'altro suo estremo A; δ la densità o peso per unità di volume della materia di cui l'asta è formata; σ la sezione retta, supposta costante, dell'asta; d x lo spessore piccolissimo di una trancia piccolissima dell'asta, e che si ottiene immaginando di sezionarla con due piani vicinissimi, normali all'asta, alla distanza piccolissima d x; d m la massa piccolissima relativa a questa trancia; x la sua distanza da O; g l'accelerazione della gravità.

Ho:

Volume della trancia di sezione σ e di spessore $dx = \sigma\, dx$.

Peso trancia = volume x peso corrispondente alla unità di volume $= \sigma\, dx \times \delta = \sigma\delta\, dx$.

Massa trancia = peso diviso per l'accelerazione g della gravità $= \frac{\sigma\delta\, dx}{g} = dm$.

Inerzia della massa d m alla distanza x dall'asse di rotazione $= dm \times x = \frac{\sigma\delta\, dx}{g} x = \frac{\sigma\delta}{g} x\, dx$.

Inerzia m r di tutta l'asta $=$

$$\int_0^l \frac{\sigma\delta}{g} x\, dx = \frac{\sigma\delta}{g} \int_0^l x\, dx = \frac{\sigma\delta}{g} \frac{l^2}{2},$$ per essere σ, δ e g costanti.

Ottengo così $m r = \frac{\sigma\delta}{2g} l^2$.

La massa m dell'asta è eguale a $\frac{\sigma l \delta}{g}$. Onde $\frac{\sigma l \delta}{g} \cdot r = \frac{\sigma\delta}{2g} l^2$; $r = \frac{l}{2}$.

Cioè, e nel caso in esame, il centro di massa dell'asta è nel punto suo di mezzo. Come si sapeva e si sa.

porre una reazione eguale e contraria. Resta così, come sola componente o forza cui si deve il moto di rotazione attorno ad O, la forza B D parallela alla tangente in A alla traiet-

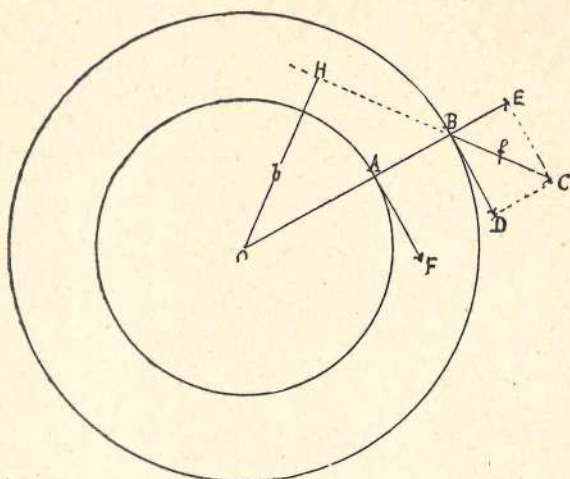



Fig. 20.

toria. Quindi parallela alla direzione dello spostamento del centro della massa m.

Sostituisco la forza B D applicata in B ecc. con una forza parallela e di egual effetto ed avente per punto di applicazione il centro di massa A. Sia A F una tale forza.

Per il principio di Archimede sul braccio di leva delle forze so che nei moti di rotazione attorno ad un asse rigido due forze sono di egual effetto quando sono di egual momento. Perciò dev'essere forza B D × suo braccio di leva O B rispetto ad O = forza A F × suo braccio di leva O A rispetto ad O. Ossia, $BD \times OB = AF \times OA$.

Per O tiro la normale O H alla linea B C di azione della forza f. Osservo che i triangoli O H B, B C D sono simili per essere entrambi rettangoli in H ed in D, per essere eguali gli angoli in B ed in C. Scrivo che i lati opposti agli angoli eguali in B ed in C ed agli angoli retti sono proporzionali fra di loro. Viene $\frac{BC}{OB} = \frac{BD}{OH}$.

Osservo ancora che O H è il braccio di leva della forza $f = BC$ rispetto all'asse di rotazione O. E siccome questo braccio ho convenuto di rappresentarlo con b ho $OH = b$

Onde viene $\frac{f}{OB} = \frac{BD}{b}$; $fb = BD \times OB$.

Sostituisco nell'eguaglianza $BD \times OB = AF \times OA$. Ottengo $fb = AF \times OA$.

Ora A F rappresenta la forza tangenziale f_T che agisce in A sul centro di massa. Quindi dev'essere ed è $AF = f_T = m a$. Inoltre $OA = r$. Onde, sostituendo, $fb = f_T \times r = m a r = m r a$.

Questa formula, o formula $fb = m r a$, esprime il secondo principio della nuova meccanica nel caso di masse vincolate ad un centro o ad un asse di rotazione rigido e fisso.

Il primo principio, o principio d'inerzia, della nuova meccanica.

Per verificare la veridicità, e generare veridicità, della formula $fb = m r a$, l'autore di quest'opera ha fatti costruire molti strumenti e meccanismi, di cui quelli rappresentati dalle unite figure non sono neanche la metà. Il che ha fatto per rispondere col risultato irrefragabile della realtà, della esperienza ai cavilli ed agli erronei ragionamenti di certi pseudo uomini di scienza che si sono proposti di impedire, di ostacolare con ogni possa il cammino ed il trionfo della verità.

Tale gente mentre pretende di essere maestra in fatto di raziocinio e di ragionamento, ha sragionato al punto di pretendere che quegli stessi modi di procedere e di ragionare che per essa sono buoni, in quanto sono da essa seguiti, non siano più buoni nei rapporti dell'autore di quest'opera e della formula $fb = m r a$.

Ad esempio, tanto nei riguardi della formula $f = m a$ che della $fb = m r a$, il simbolo m rappresenta tutta la massa del sistema che si considera. Quindi, e nel caso dei moti di rotazione, rappresenta tanto la massa ruotante che quella che corrisponde alle forze ad essa applicate.

Se, e come insegna e dice Galileo, si vuole procedere dal più facile al più difficile, dal più semplice al più complesso, conviene considerare via via i seguenti tre casi:

1) Caso più semplice in cui la massa ruotante è preponderante, e fortemente preponderante, a fronte di quella che corrisponde alle forze che ad essa vengono applicate. Per modo da esser lecito di considerare, in via di approssimazione, come massa di tutto il sistema la massa del corpo che ruota.

2) Caso pure più semplice in cui è preponderante, e fortemente preponderante, la massa (o le masse) delle forze che si applicano, a fronte della massa ruotante. Per modo da essere lecito di considerare, in via di approssimazione, come massa di tutto il sistema quella che corrisponde alle forze, tanto agenti come potenze che come resistenze, e che vengono applicate...

3) Caso più complesso in cui le due masse (del rotore e delle forze ad esso applicate) sono tali da non essere lecito di trascurare l'una a fronte dell'altra, e quindi si debba tener conto di entrambe.

* * *

Il primo caso è quello che si verifica con lo strumento della fig. 20, stato gentilmente fornito all'autore di quest'opera dal Cav. Egisto Cirinei, ex-Segretario dell'Archivio della Camera dei Deputati. Tale strumento è formato da due aste o leve identiche, mobilissime attorno a due assi di rotazione terminanti in punta d'ago e d'acciaio, molto fine. Alle due aste sono fissati dei piattelli, a snodo od a cerniera, sui quali si possono collocare dei pesi e farli agire come potenze o come resistenze.

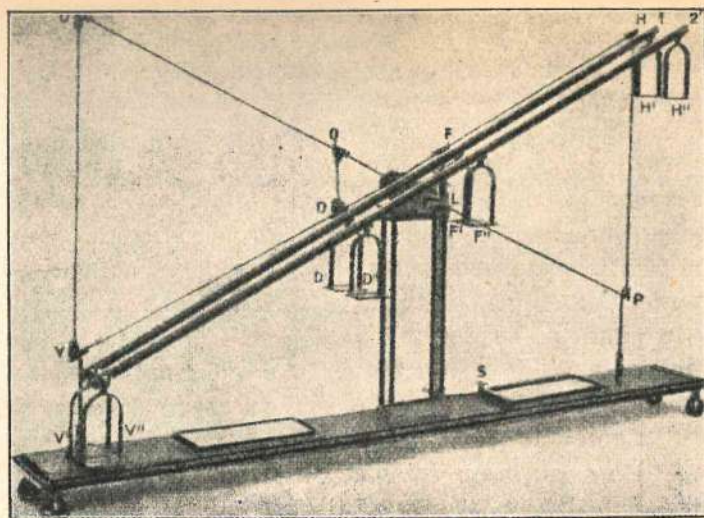



Fig. 21.

Le aste sono due allo scopo di avere un sistema comparativo e tale da eliminar la noia, ed anche l'inconveniente, di dover contare i tempi. Difatti, importa molto, per semplificar l'indagine, far sì che i tempi siano sempre eguali, nel qual caso il tempo non corrisponde più ad una variabile, ma ad una costante, e ad ogni modo viene a potersi eliminare. E per ottenere una tale eguaglianza dei tempi basta mettere in moto le due aste a partire da uno stesso istante, ed arrestare il loro movimento pure ad uno stesso istante.

Nell'apparecchio del Cirinei ogni asta, coi relativi piattelli, pesa circa 420 gr. Ed i piattelli sono alle distanze di sette centimetri e di $7 \times 5 = 35$ cm. dal rispettivo asse di rotazione.

Si ha così che se si pongono sui piattelli dei pesi di pochi grammi, da 1 a 5 gr., e si fanno agire questi pesi come forze motrici, le masse relative sono trascurabili a fronte

della massa dell'asta, cui compete il peso di 420 gr. Ed è quindi lecito di considerare questa come massa di tutto il sistema.

Tali forze, per essere i piattelli alle distanze di 7 e di $35=7\times5$ cm. dal corrispondente asse o fulcro, possono essere fatte agire con braccio $b=7$ cm. oppure $b'=5\,b=5\times7$ cm., cinque volte più grande.

In considerazione del fatto che le distanze fra i piattelli e l'asse di rotazione possono rappresentare non solo il braccio di leva di una forza, ma anche il raggio d'inerzia di una massa posta sul piattello, l'autore di quest'opera ha creduto bene di fare costruire altri strumenti, come quello della fig. 21, dove i piattelli si possono spostare lungo l'asta. Quindi il rapporto della loro distanza dall'asse di rotazione invece di essere eguale ad uno (quando le forze, o le resistenze, sono entrambe sopra piattelli alla stessa distanza di 7 cm., o di 35 cm. dall'asse di rotazione) oppure 1/7..., può assumere un valore qualsiasi. Le aste, poi, sono ancora massicce, del peso di oltre 500 gr., ed i piattelli sono di alluminio. Se sopra questi piattelli si pongono ancora dei pesi di pochi gr. (1 gr., 2 gr., 5 gr.) si ha ancora che la massa relativa a tali pesi è trascurabile a fronte di quella dell'asta.

Cioè le accelerazioni stanno fra di loro come le velocità angolari. Ora le velocità angolari stanno fra di loro come gli angoli che vengono descritti in tempi eguali. Perciò dalla misura o confronto di questi angoli si ha il modo di inferirne il confronto e rapporto fra le accelerazioni.

Per procedere dal facile al più difficile conviene poi far agire in una prima esperienza forze eguali con bracci eguali; indi forze eguali con bracci di leva diversi in una seconda esperienza, ecc. I risultati che si trovano sono i seguenti:

Prima esperienza. — Forze eguali agiscono per tempi eguali con bracci eguali.

Le accelerazioni e le velocità angolari risultano eguali.

Questo risultato è concorde tanto con la formula $f=m\,a$ che con la $f\,b=m\,r\,a$.

Seconda esperienza. — Forze eguali agiscono per tempi eguali con bracci di leva diversi.

Le accelerazioni e le velocità angolari stanno fra di loro come i bracci di leva. Cioè l'esperienza dà

$$\frac{a}{a'}=\frac{\omega}{\omega'}=\frac{b}{b'}.$$

Fig. 22.

Ciò posto, si indichi con m la massa di quest'asta, e che si può considerare, con grande approssimazione, come massa di tutto il sistema ruotante;

con f la forza che agisce sulla prima asta del sistema comparativo e con b il suo braccio di leva;

con f' la forza che agisce sulla seconda asta, di egual massa m, e con b' il relativo braccio di leva.

Le due aste vengano poste in moto a partire da uno stesso istante, e fermate pure ad uno stesso istante, per modo da aver sempre $t=t'$, se con t si indica il tempo relativo al movimento della prima asta e con t' quello che compete alla seconda.

Se le forze agenti sono dei pesi, sono delle forze di gravità, la forza viene ad essere costante, o, meglio, praticamente costante. Nel caso di una forza costante, e quando si indichino con a e con a' le accelerazioni corrispondenti a due masse ecc. con v, v' le velocità; con ω, ω' le velocità angolari, con t, t' i tempi, deve risultare e risulta

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{v}{t}=\frac{r\,\omega}{t}\quad;\quad a'=\frac{dv'}{dt'}=\frac{v'}{t'}=\frac{r'\,\omega'}{t'}.$$

Nel caso in esame i raggi d'inerzia delle due aste, rispetto all'asse di rotazione, sono eguali, per essere eguali ed identiche le aste. Quindi se si indicano con r e con r' i raggi d'inerzia della prima asta e della seconda, si ha $r=r'$. Inoltre, per quanto sopra si è detto, $t=t'$. Pertanto si ottiene

$$a=\frac{v}{t}=\frac{r\,\omega}{t}\quad;\quad a'=\frac{v'}{t}=\frac{r\,\omega'}{t}\quad;\quad \frac{a}{a'}=\frac{v}{v'}=\frac{\omega}{\omega'}.$$

Questo risultato è ancora concorde con la formula $f\,b=m\,r\,a$, ma non lo è più con la $f=m\,a$. Difatti, la prima formula dà il sistema $f\,b=m\,r\,a$; $f'\,b'=m'\,r'\,a'$, con $f=f'$ (per essere le forze eguali); $m=m'=$massa dell'asta, e che è la stessa...; $r=r'=$raggio d'inerzia dell'asta, e che è pure lo stesso...; Onde $f\,b=m\,r\,a$; $f\,b'=m\,r\,a'$. Da qui si ha, dividendo membro a membro, $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$. Come dice l'esperienza.

Se si verificasse e fosse soddisfatta la formula $f=m\,a$ dovrebbe risultare $f=m\,a$; $f'=m'\,a'$, con $f=f'$; $m=m'$. Quindi $a=a'$. Il che, dice l'esperienza, non è vero.

Terza esperienza. — Forze diverse agiscono per tempi eguali con bracci di leva eguali.

Le accelerazioni e le velocità angolari stanno fra di loro come le forze.

Questo risultato è concorde tanto con la formula $f\,b=m\,r\,a$ quanto con la $f=m\,a$.

Quarta esperienza. — Forze diverse agiscono per tempi eguali con bracci di leva diversi, ma tali che i prodotti delle forze per i rispettivi bracci di leva sono eguali.

Le accelerazioni e le velocità angolari risultano eguali.

Questo risultato è concorde con la formula $f\,b=m\,r\,a$, la quale dà $f\,b=m\,r\,a$; $f'\,b'=m'\,r'\,a'$, con $f\,b=f'\,b'$ (per essere eguali i prodotti delle forze per i rispettivi bracci); $m=m'$; $r=r'$. Quindi

$f\,b=m\,r\,a$; $f'\,b'=f\,b=m\,r\,a'$; $m\,r\,a=m\,r\,a'$; $a=a'$.
Come dice l'esperienza.

Secondo la formula $f=m\,a$ dovrebbe risultare $f=m\,a$; $f'=m'\,a'$, con f diverso da f' perchè le forze sono diverse, sono diseguali; $m=m'$. Onde $f=m\,a$; $f'=m\,a'$; $\frac{f}{f'}=\frac{a}{a'}$

E siccome $f\neq f'$; $\frac{f}{f'}\neq 1$, dovrebbe pur essere $\frac{a}{a'}\neq 1$; $a\neq a'$. Mentre l'esperienza dice che $a=a'$.

Quinta esperienza. — Forze diverse agiscono per tempi eguali con bracci di leva diversi, tali che i prodotti delle forze per i loro bracci di leva, o momenti delle forze..., sono pure diversi.

Le accelerazioni e le velocità angolari stanno fra di loro come i prodotti delle forze per i loro bracci di leva. Cioè risulta

$$\frac{a}{a'}=\frac{\omega}{\omega'}=\frac{f\,b}{f'\,b'}.$$

La formula $f\,b=m\,r\,a$ dà $f\,b=m\,r\,a$; $f'\,b'=m'\,r'\,a'$, con $m=m'$; $r=r'$. Pertanto $f\,b=m\,r\,a$; $f'\,b'=m\,r\,a'$; $\frac{a}{a'}=\frac{f\,b}{f'\,b'}$.

Come dice l'esperienza.

La formula $f=m\,a$ dà invece $f=m\,a$; $f'=m\,a'$; $\frac{a}{a'}=\frac{f}{f'}$.

Mentre l'esperienza dice che $\frac{a}{a'}=\frac{f\,b}{f'\,b'}$.

* * *

Le esperienze sopra citate sono atte ad illuminare, in ispecie, per ciò che riguarda l'effetto dell'azione di una forza e del suo braccio di leva. V'è poi un'altra serie di esperienze da fare, e riguardante, in special modo, le masse sulle quali le forze agiscono ed i loro raggi d'inerzia rispetto ad un asse o ad un centro di rotazione. Al qual proposito convien fare in modo che sia non già la massa dell'asta ad essere preponderante a fronte di quella relativa ai pesi o corpi che vengono posti sui piattelli, ma che si verifichi il contrario. Che sia, cioè, la massa corrispondente a questi pesi o corpi ad essere la preponderante a fronte di quella dell'asta. E preponderante al punto di essere lecito di considerare la massa di tali corpi o pesi, in via di approssimazione, come massa di tutto il sistema.

A tale uopo l'autore di quest'opera ha fatto costruire lo strumento della fig. 22, dove le aste non sono più massiccie, ma internamente cave, e rese le più leggere possibili, compatibilmente con la condizione che non s'inflettano per l'azione dei pesi che si mettono poi sui piattelli. Questi piattelli sono di alluminio, e pure i più leggeri possibili, per guisa che il peso di un'asta e dei relativi piattelli non supera i 100 gr. Si ha così che se sui piattelli si pongono dei pesi di 500 gr. l'uno, da parti opposte dell'asse di rotazione, e quindi, in tutto, di 1000 gr., oppure di 1000 gr. l'uno, ed in tutto di 2000 gr...., e poi si rompe l'equilibrio con l'aggiunta di un peso di pochi grammi, è lecito di considerare come massa del sistema quella corrispondente ai pesi che vengono posti sui piattelli. Quanto poi ai raggi d'inerzia corrispondenti a questi pesi o, più precisamente, alle loro masse, essi sono dati dalle distanze fra i punti di sospensione dei piattelli e l'asse di rotazione.

Fig. 23

Per render più facile l'indagine che ci si propone di fare conviene ancora fare agire le forze sempre per lo stesso tempo, liberando le aste ad uno stesso istante e fermandole allo stesso istante. Ed inoltre fare agire sempre forze eguali con bracci di leva eguali.

Così facendo si trovano i seguenti risultati:

Sesta esperienza. — Forze eguali agiscono per tempi eguali, con bracci eguali, sopra masse eguali e di egual raggio d'inerzia.

Le accelerazioni e le velocità angolari risultano eguali. Il quale risultato è naturale, ed è concorde tanto con la formula $f\,b=m\,r\,a$ che con la $f=m\,a$.

Settima esperienza. — Forze eguali agiscono per tempi eguali, con bracci eguali, sopra masse eguali, ma di diversi raggi d'inerzia.

Le accelerazioni stanno fra di loro in ragione inversa dei raggi d'inerzia. Cioè se si indicano con m e con m' le masse, con r e con r' i loro raggi d'inerzia rispetto all'asse di rotazione, si trova che $\frac{a}{a'}=\frac{r'}{r}$.

Questo risultato è concorde con la formula $f\,b=m\,r\,a$, la quale dà il sistema $f\,b=m\,r\,a$; $f'\,b'=m'\,r'\,a'$, con $f=f'$, $b=b'$; $m=m'$. Onde $f\,b=m\,r\,a$; $f\,b=m\,r'\,a'$; $r\,a=r'\,a'$; $\frac{a}{a'}=\frac{r'}{r}$. Come dice l'esperienza.

Ma non è concorde con la $f=m\,a$, secondo la quale dovrebbe risultare $a=a'$.

Ottava esperienza. — Forze eguali agiscono con bracci eguali, per tempi eguali, sopra masse diverse, ma di egual raggio d'inerzia.

Le accelerazioni e le velocità angolari stanno fra di loro in ragione inversa delle masse. Vale a dire risulta

$$\frac{a}{a'}=\frac{\omega}{\omega'}=\frac{m'}{m}.$$

Questo risultato è fornito tanto dalla formula $f\,b=m\,r\,a$ che dalla $f=m\,a$.

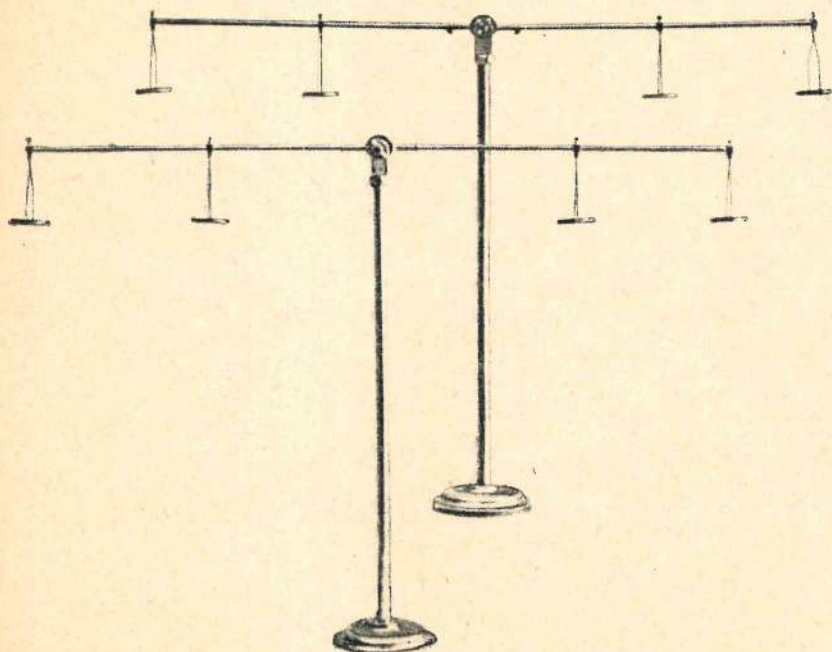
Nona esperienza. — Forze eguali agiscono con bracci eguali, per tempi eguali, sopra masse diverse e di diverso raggio d'inerzia, ma tali che i prodotti fra masse e raggi d'inerzia sono eguali, tali, cioè, da avere $m\,r=m'\,r'$.

Le accelerazioni risultati eguali. Risulta $a=a'$.

Questo risultato è pure fornito dalla formula $f\,b=m\,r\,a$, la quale dà $f\,b=m\,r\,a=m'\,r'\,a'$ con $m\,r=m'\,r'$. E quindi $a=a'$. Come dice l'esperienza.

Invece la formula $f=m\,a$ dà $f=m\,a$; $f'=m'\,a'$ con $f=f'$ e m diverso da m', per essere le masse diverse. Quindi $m\,a=m'\,a'$, e se m è diverso da m' dovrebbe pur essere a diverso da a'. Mentre l'esperienza dice che $a=a'$.

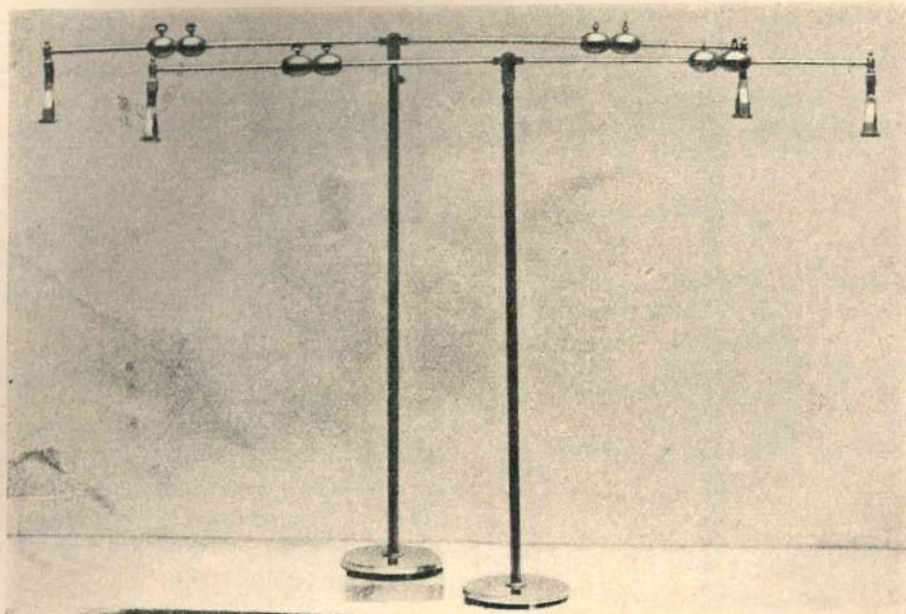
Decima esperienza. — Forze eguali agiscono con bracci eguali, per tempi eguali, sopra masse comunque diverse e di raggi d'inerzia comunque diversi.

Le accelerazioni stanno fra di loro in ragione inversa dei prodotti delle masse per i rispettivi raggi d'inerzia. Vale a dire risulta $\frac{a}{a'}=\frac{m'\,r'}{m\,r}$.

Anche questo risultato è fornito dalla formula $f\,b = m\,r\,a$, che dà $f\,b = m\,r\,a = m'\,r'\,a'$. Onde $\frac{a}{a'} = \frac{m'\,r'}{m\,r}$. Come l'esperienza dice.

vengono ad agire con bracci eguali ed eguali a ρ oppure $\rho' = 2\,\rho$.

Se sui piattelli si collocano dei pesi, i raggi d'inerzia relativi alle masse di questi pesi, rispetto agli assi di rota-

Fig. 24.

zione delle doppie carrucole, sono ancora eguali a ρ e ρ'..

Invece la formula $f = m\,a$ dà $f = m\,a = m'\,a'$; $\frac{a}{a'} = \frac{m'}{m}$.

Mentre l'esperienza dice che $\frac{a}{a'} = \frac{m'\,r'}{m\,r}$.

Si ha così il modo di fare agire forze eguali o diseguali, con bracci di leva eguali oppure uno doppio dell'altro, su masse eguali o diseguali, e di raggi d'inerzia eguali oppure uno doppio dell'altro. E sempre si trova che la formula $f\,b = m\,r\,a$ è confermata per vera, mentre la $f = m\,a$ lo è sol-

* * *

Si possono far poi delle esperienze nei rapporti delle quali si debba tener conto tanto della massa dell'asta che di quella corrispondente ai pesi che vengono posti sui piattelli. Così si supponga di ricorrere all'apparecchio del Cirinei, rappresentato dalla fig. 20, od a quello fatto costruire dall'autore di quest'opera e dove le aste sono piene e massiccie, del peso di circa 500 gr. l'una. Si pongano sui piattelli, da parti opposte dell'asse di rotazione, dei pesi di 200 gr. l'uno, ed in tutto di 400 gr., oppure di 300 gr. l'uno ecc. In tali casi non è più lecito di trascurare la massa dell'asta a fronte di quella relativa ai pesi, o viceversa, e perciò si deve tener conto tanto di una massa che dell'altra.

Se si fa questo, e si ricorre all'esperienza, sempre si trova che la formula $f\,b = m\,r\,a$ è confermata per vera. Come pure è confermata per vera dallo strumento od apparecchio rappresentato dalla fig. 23. Nel quale apparecchio si hanno degli elissoidi massicci, del peso di 100 gr. l'uno, i quali si possono far scorrere lungo le aste, e fissarli a queste nelle posizioni che più piacciono per mezzo di viti di pressione.

Quanto alla formula $f = m\,a$ si trova ancora che è confermata per vera solo in qualche caso particolare, ma il più delle volte non lo è.

* * *

Tutti i risultati su esposti si possono pure ottenere cogli apparecchi rappresentati dalle figg. 24 e 25.

In questi strumenti si hanno due carrucole a due gole, una delle quali è di raggio doppio dell'altra. Siano ρ e ρ' questi raggi. Se si fanno agire delle forze f e f' su fili convenientemente tesi e passanti per le gole di raggi ρ e ρ', gli è come se le forze agissero con bracci $b = \rho$ e $b' = \rho' = 2\,\rho = 2\,b$. Se i fili passano per gole di egual raggio, le forze

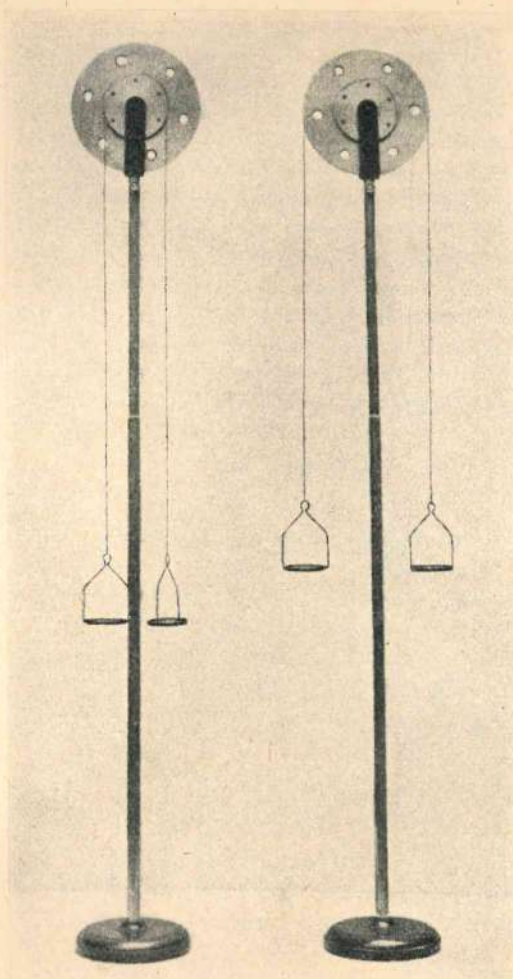



Fig. 25

tanto quando le forze agiscono con bracci eguali ed i raggi d'inerzia delle masse sulle quali le forze agiscono sono pure eguali.

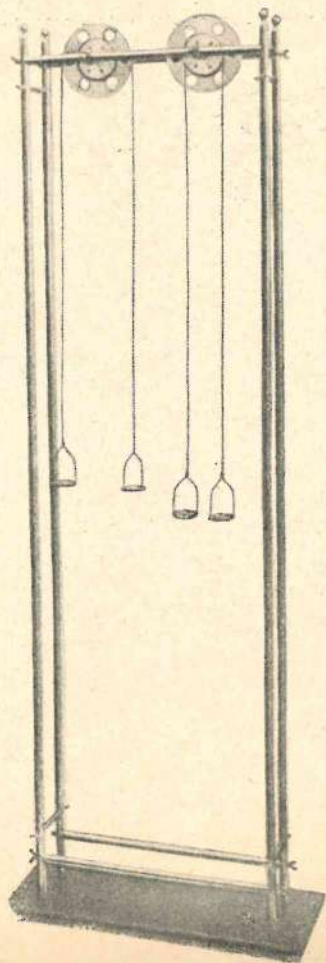



Fig. 26.

* * *

L'autore di quest'opera ha pure fatte costruire delle carrucole ad una sola gola, e di raggi diversi ed uno doppio dell'altro. La carrucola di raggio doppio è pure di peso doppio, e quindi di massa doppia dell'altra.

E lo strumento relativo è rappresentato dalla fig. 26.

Si applichino o facciano agire dei piccoli pesi (di 2 gr., 5 gr.,...) in modo da essere lecito di considerare come massa del sistema la massa della carrucola. Inoltre si facciano agire forze eguali per tempi eguali. Si contraddistinguano con un apice le grandezze relative alla seconda carrucola, o carrucola di raggio doppio e di massa doppia. Nei rapporti della quale la forza agisce con braccio doppio. Si trova che a quest'ultima carrucola corrisponde una velocità angolare quattro volte più piccola. Cioè si trova che $\omega' = \frac{\omega}{4}$.

Nel caso in esame si ha $a = r\,\omega$; $a' = r'\,\omega'$ con $r' = 2\,r$. Perciò $a' = 2\,r\,\omega'$; $\frac{a}{a'} = \frac{r\,\omega}{2\,r\,\omega'} = \frac{\omega}{2\,\omega'}$. E sostituendo ad ω' il valore $\frac{\omega}{4}$ dato dall'esperienza, $\frac{a}{a'} = \frac{\omega}{2\,\frac{\omega}{4}} = 2$; $a = 2\,a'$; $a' = \frac{a}{2}$.

La formula $f\,b = m\,r\,a$ dà il sistema $f\,b = m\,r\,a$; $f'\,b' = m'\,r'\,a'$ con $f' = f$; $b' = 2\,b$; $m' = 2\,m$; $r' = 2\,r$. Onde $f\,b = m\,r\,a$; $f \times 2\,b = 2\,m \times 2\,r \times a'$; $2\,m\,r\,a = 4\,m\,r\,a'$; $a = 2\,a'$; $a' = \frac{a}{2}$. Come l'esperienza dice.

Il quale risultato è pure dato dalla formula $f = m\,a$, perchè si ottiene $f = m\,a = m'\,a'$ con $m' = 2\,m$. Quindi $a = 2\,a'$; $a' = \frac{a}{2}$.

E si ottengono ancora dei risultati concordi tanto con la formula $f = m\,a$, che con la $f\,b = m\,r\,a$, se si pongono sui piattelli dei pesi grandi, tali che la massa loro corrispondente sia preponderante a fronte di quella della carrucola, e da poter essere considerata come massa del sistema. Il quale fatto si spiega osservando che il raggio della carrucola rappresenta ed è, in questo caso, tanto il braccio di leva della forza agente quanto il raggio d'inerzia della massa sulla quale la forza agisce. Perciò se si indica con ρ il raggio della carrucola ecc. si ha $b = r = \rho$. E la formula $f\,b = m\,r\,a$ con $b = r = \rho$ si semplifica nella $f = m\,a$.

* * *

Devesi però dire che tale conferma casuale della formula $f = m\,a$ e le altre sopra viste, corrispondenti al caso particolare in cui risulta $b = r$, non bastano per poterne inferire che la formula è generalmente vera, come da taluni si è preteso e si pretende. Al contrario, devesi dire che basta che in un solo caso la formula non sia confermata per vera, e se ne son visti non uno ma parecchi, per doverne inferire che generalmente vera non è.

Chi volesse meglio convincersi, nei riguardi dei sistemi di carrucole, ne prenda due a due gole come quelle dello strumento rappresentato dalla fig. 24. Ove ogni carrucola pesa 150 gr. e le due carrucole sono tra loro identiche. Quindi se si indicano con r e con r' i loro raggi d'inerzia rispetto all'asse di rotazione si ha $r = r'$.

Si faccia passare un filo di seta per la gola di raggio metà rispetto alla prima doppia carrucola, per la gola di raggio doppio nei rapporti della seconda. Si tendano tali fili con dei pesi piccoli, di due grammi, od al più di 5 gr. l'uno.

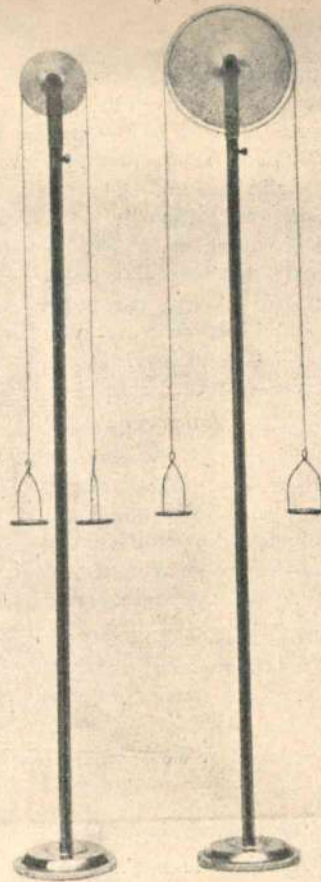



Fig. 27

Indi si aggiungano ai pesi, poniamo, di destra dei pesi addizionali o motori pure piccoli, ad esempio di 2 gr. l'uno. Si ha allora che la massa relativa a questi pesi è piccola, è tra-

scurabile a fronte della massa della doppia carrucola. Per conseguenza è lecito di considerare quest'ultima come massa di tutto il sistema.

Si trova che se si fanno agire forze eguali (2 gr.) per tempi eguali, ma con bracci diversi, ed uno doppio dell'altro (eguali ai raggi delle gole delle carrucole), alla forza che agisce con braccio doppio corrisponde un numero di giri doppio, e quindi una velocità angolare doppia della corrispondente carrucola, un'accelerazione doppia. Risulta, cioè, $\omega' = 2\omega$; $a' = 2a$.

Questo risultato è pure fornito dalla formula $fb = mra$. La quale dà $fb = mra$; $f'b' = m'r'a'$ con $f' = f$ = forza di 2 gr.; $b' = 2b$; $m' = m$ = massa di una delle doppie carrucole, le quali sono identiche...; $r = r'$ = raggio d'inerzia della doppia carrucola. Onde $fb = mra$; $f \times 2b = m \times r \times a'$; $2mra = mra'$; $a' = 2a$. Come l'esperienza dice.

Invece la formula $f = ma$ dà $f = ma$; $f' = m'a'$, con $f' = f$; $m' = m$. Quindi $a' = a$. Mentre l'esperienza dice che $a' = 2a$.

* * *

I surriferiti risultati di esperienze sono tali da illuminare non solo nei riguardi del secondo principio della meccanica, ma anche del primo, cioè del principio d'inerzia. Difatti essi dicono che se si fanno agire forze eguali per tempi eguali, con bracci di leva eguali, le accelerazioni stanno fra di loro in ragione inversa dei prodotti delle masse per i rispettivi raggi d'inerzia. E siccome le stesse accelerazioni devono stare fra di loro in ragione inversa delle rispettive inerzie, si può dire che queste inerzie sono proporzionali ai prodotti mr delle masse per il loro raggio d'inerzia. Non già alle sole masse, come vorrebbe il primo principio della meccanica di Galileo e di Newton.

Si ottiene così un principio d'inerzia che è più complesso di quest'ultimo, e che comprende quest'ultimo come caso particolare e più semplice. Prima di enunciarlo, però, è bene premettere quanto in appresso.

E' ovvio che la velocità di un corpo o va variando o non va variando. Cioè la velocità del corpo od è costante, o non lo è.

Convengo di dire che un corpo è in equilibrio quando la sua velocità è costante.

Questa velocità costante o è zero, od è diversa da zero. Se è zero convengo di dire che il sistema è in quiete, e che l'equilibrio è statico. Se è diversa da zero, e naturalmente costante, dico che l'equilibrio è dinamico.

Posto ciò, si può enunciare così il *primo principio, o principio d'inerzia, della nuova meccanica*:

1) Un corpo non soggetto a forze, o soggetto ad un sistema di forze di risultante zero, non può variare di per sè la sua velocità. Quindi è in equilibrio.

Questo equilibrio può essere statico o dinamico. Se è statico la velocità del corpo è costantemente zero, ed il corpo è in quiete. Se è dinamico la velocità del corpo è diversa da zero e costante. Ed in questo caso il moto del corpo deve essere ed è o rettilineo uniforme (come si dice nella meccanica Newtoniana) o circolare uniforme (nuova meccanica).

2) I corpi presentano una specie di riluttanza (come dice Newton) o di resistenza a variare di velocità. Tale riluttanza chiamasi inerzia.

Nel caso di una massa libera, o non soggetta a legami e vincoli, l'inerzia è proporzionale alla massa o quantità di materia del corpo, come si dice nella meccanica di Galileo e di Newton.

Ma nel caso di una massa soggetta a legami o vincoli l'inerzia non è proporzionale alla sola massa, ma dipende anche dal vincolo. Così nel caso di una massa legata ad un centro o ad un asse di rotazione rigido e fisso, l'inerzia è proporzionale al prodotto mr della massa m per la distanza r fra il centro di massa e l'asse o centro di rotazione, o raggio d'inerzia rispetto all'asse.

Il secondo principio della nuova meccanica.

I risultati di esperienze esaminati ed esposti nel precedente capitolo provano e dicono ancora che nel caso di forze agenti con braccio di leva sopra una massa vincolata ad un asse di rotazione, l'effetto dell'azione della forza è proporzionale non alla sola forza, ma al prodotto fb della forza per il suo braccio di leva. Dicono, inoltre, che l'inerzia è proporzionale non alla sola massa, ma al prodotto della massa per il suo raggio d'inerzia, rispetto all'asse di rotazione.

Ciò posto, si può dire:

Ammettiamo, come dice Newton, che l'accelerazione che un corpo acquista per l'azione di una forza debba essere direttamente proporzionale all'effetto dell'azione della forza ed inversamente proporzionale all'inerzia della massa sulla quale la forza agisce. Che quindi se si indica con e l'effetto dell'azione della forza, con i l'inerzia ecc. debba verificarsi una relazione del tipo $a = \frac{e}{i}$.

Per il fatto che nel caso di masse vincolate ad un asse di rotazione ecc. l'effetto dell'azione della forza risulta eguale o proporzionale al prodotto fb della forza per il suo braccio di leva; per il fatto che l'inerzia è proporzionale al prodotto mr della massa per il suo raggio d'inerzia, si può porre $e = fb$; $i = mr$. Onde, sostituendo, $a = \frac{e}{i} = \frac{fb}{mr}$; $fb = mra$.

Si ottiene, cioè, la formula che esprime il secondo principio della nuova meccanica nel caso di masse vincolate ad un centro o ad un asse di rotazione, ecc.

* * *

Questo modo di ragionare e di procedere è quello stesso che Newton fa per dedurre il secondo principio della sua meccanica. Con la differenza, però, che Newton applica un tal ragionare al caso più semplice di una massa libera e di una forza agente senza braccio di leva. E pertanto dovevasi e devesi dire che è in questo caso, solo in questo caso, che la formula deve ritenersi per conforme al vero.

Si è invece preteso che essa sia vera in generale e sempre, nel senso più assoluto. Ed oltre al ragionamento o deduzione della formula da parte di Newton si sono escogitate diverse altre deduzioni, tutte pretese generalmente vere.

Ma se si considerano queste deduzioni e pretese dimostrazioni, sempre si trova un qualche punto di errore, o di non generalmente vero. Difatti si può dire, in generale:

Qualunque sia il ragionamento che uno si faccia, gli è giocoforza partire da una qualche ipotesi, da un qualche presupposto. E nella vera scienza, e come insegna e dice Leonardo da Vinci, l'ipotesi dev'essere ritenuta per vera in quanto è confermata per vera dai risultati della realtà, dell'esperienza.

Se invece l'ipotesi non è confermata per vera, devesi da ciò inferire che essa è erronea. Che per conseguenza sono erronei quei qualsiansi ragionamenti che si possono avere fatti o fare partendo da una tale ipotesi. Ed è erroneo, e per davvero erroneo a priori, quel qualsiasi risultato cui si può giungere.

Orbene, è questo che devesi dire della maggior parte dei ragionamenti che sono stati fatti e si fanno per dedurre il secondo principio della meccanica di Galileo e di Newton. Così nella maggior parte dei trattati di meccanica razionale si dice:

« Una stessa forza che agisce sopra uno stesso corpo imprime al corpo la stessa accelerazione ». (1)

Da qui consegue che se più forze f, f', f''... agiscono sopra uno stesso corpo imprimendogli le accelerazioni a, a', a'' . deve risultare $\frac{f}{a} = \frac{f'}{a'} = \frac{f''}{a''} = \ldots$

Perchè, si dice, se si ammette che il rapporto di proporzionalità non sia costante, e possa andare variando, si troverebbe che ad una forza maggiore potrebbe corrispondere una

(1) Come si legge nelle « Lezioni di meccanica razionale » del prof. G. Morera - date alla R. Università di Torino - pag. 165.

accelerazione minore (1). E questo è impossibile ed è incompatibile con l'ipotesi che ad una stessa forza agente sopra uno stesso corpo debba corrispondere sempre lo stesso effetto, e quindi la stessa accelerazione.

Si dice poi:

Per sapere che cosa rappresenta il valore del rapporto $\frac{f}{a}$ tra la forza e l'accelerazione, basta considerare un caso qualunque. Ad esempio, quello della forza di gravità. In questo caso la forza f è rappresentata dal peso P del corpo, e l'accelerazione è rappresentata dall'accelerazione g della gravità. Perciò in luogo della relazione $\frac{f}{a}$ = costante si deve scrivere la $\frac{P}{g}$ = cost. Nel caso della gravità l'esperienza dice che g è costante, che è la stessa per tutti i corpi che sono ad una egual distanza dal centro della Terra. Si sa dai tempi più remoti che il peso di un corpo è proporzionale alla quantità di materia o massa del corpo. Quindi si può porre $P = \text{cost.} \times m$.

E siccome pure g è costante, dice l'esperienza, alla costante di una tal relazione si può assegnare il valore g. Ottenendo, così $P = g \times m = m\, g$ (2); $\frac{P}{g} = m$ = massa o quantità di materia del corpo.

Il peso P è una forza e g è la corrispondente accelerazione. Se, in generale, una forza la si indica con f (invece che con P) e l'accelerazione con a (invece che con g), si ottiene $\frac{f}{a} = m$; $f = m\, a$.

* * *

Ora, senza vedere il ragionamento, ed anzi ammettendolo come vero, posso dire e dico:

Vediamo, prima di ogni cosa, il punto più importante, o punto di partenza, od ipotesi da cui il ragionamento deriva.

Questa ipotesi è che se una stessa forza agisce sopra uno stesso corpo l'accelerazione dev'essere sempre la stessa. Il che rinviene a dire che se forze eguali agiscono su masse eguali le accelerazioni devono essere sempre eguali.

Ma l'esperienza dice che questo non è vero. Perchè, dice l'esperienza, nei moti di rotazione ecc., se forze eguali agiscono su masse eguali, ma con bracci di leva diversi, le accelerazioni stanno fra di loro come i bracci di leva. Conseguentemente a bracci di leva diversi corrispondono delle accelerazioni diverse, per quanto siano eguali le forze ed eguali le masse sulle quali le forze agiscono.

Se l'esperienza mi dice che l'ipotesi o presupposto da cui si parte non è generalmente vera, è inutile che io scenda ad esaminare il ragionamento che poi si fà. E' inutile che passi ad esaminare il risultato cui si giunge o perviene. Perchè posso dire, e dire a priori, che questo risultato non può essere generalmente e sempre vero.

Quindi dire, nel caso in esame, cioè nel caso di masse vincolate ad un asse di rotazione, che non è e non può essere generalmente e sempre vero il secondo principio fondamentale della meccanica di Galileo e di Newton.

* * *

Altri hanno detto che il secondo principio della meccanica Newtoniana può essere dedotto come conseguenza di una definizione. E che, contrariamente al vero, le definizioni non si discutono.

Più precisamente, hanno detto che si può stabilire, per definizione, che:

L'accelerazione di un corpo è la forza che corrisponde all'unità di massa. Che posto ciò si può dire:

Sia F la forza che corrisponde all'unità di massa. Per definizione si ha $F = a$.

Ora, sempre si è detto, se alla massa uno corrisponde la forza F, alle masse due, tre,... m devono corrispondere le forze $2\,F$, $3\,F$,... $m\,F$.

Indico con f la forza che corrisponde alla massa m. Dev'essere $f = m\,F$. E siccome $F = a$, si ottiene, sostituendo, $f = m\,a$.

Ma una cosa devesi vedere: se la definizione da cui si parte è sempre giusta e sempre conforme al vero. Perchè tale pretesa definizione non è che l'ipotesi di partenza. Ed al solito devesi dire che l'ipotesi, la quale di certo non cambia se la si chiama col nome di definizione invece che d'ipotesi, è generalmente e sempre conforme al vero.

Ed allora osservo:

E' sempre vero il dire che l'accelerazione è la forza che corrisponde all'unità di massa? Suppongo di fare agire la forza f sulla massa m. La forza che corrisponde all'unità di massa è $\frac{f}{m}$. E se questa forza la indico con F deve risultare $\frac{f}{m} = F$.

Suppongo di fare agire una forza costante eguale a F sopra masse eguali, eguali a m, ma con bracci diversi b e b'. Dovrei ottenere delle accelerazioni eguali.

Più precisamente, dovrei ottenere la forza che corrisponde all'unità di massa. La quale, evidentemente, deve avere un valore univoco, se è giusta e vera la definizione da cui si parte.

In altre parole, dovrebbe risultare $f = m\,F = m\,a$ in un caso, e $f' = m'\,F' = m'\,a'$ nel secondo, con $F = F'$; $f = f'$; $m = m'$ per ipotesi. E quindi $a = a'$.

Ma l'esperienza dice che questo non è vero. Perchè se si fanno agire forze eguali su masse eguali, ma con bracci di leva b e b' diversi, non si trova che le accelerazioni sono eguali. Si trovano, invece, due accelerazioni a ed a' diverse, e che stanno fra di loro come i bracci di leva. Si trova che $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$.

Non essendo confermata come sempre vera la definizione od ipotesi da cui si parte, non posso dire che sia generalmente e sempre vera la conseguenza cui si perviene. Conseguenza che è rappresentata dalla formola $f = m\,a$ esprimente il secondo principio della meccanica di Galileo e di Newton.

* * *

La non generale veridicità del presupposto da cui molti partono per dedurre il secondo principio della meccanica di Galileo e di Newton, cioè del presupposto che rispetto ad una data massa le forze debbano stare fra di loro come le accelerazioni, può essere anche provata ragionando così:

Si sa che la nozione di forza applicata ad un corpo di massa m ha per origine la sensazione dello sforzo muscolare che devesi fare per sostenere un corpo pesante, o per farne variare la velocità facendogli acquistare un'accelerazione.

Ciò posto, dico:

---

(1) E' questo, ad esempio, che si dice nel « Corso di meccanica razionale » del prof. Tedone - alla R. Università di Genova - pag. 241.

(2) Come risulta dai precedenti capitoli, questa formola è già stata applicata, e quindi ammessa implicitamente come conforme al vero. Il che deve parere ed è naturale.
Secondo la nuova meccanica la formola $f = m\,a$ deve ritenersi per vera non in generale e sempre, ma soltanto quando si verificano i presupposti da cui sono partiti Galileo e Newton per dedurla.
Questi presupposti si verificano nel caso della forza di gravità e della relativa accelerazione. Perchè il punto di applicazione della forza di gravità di un corpo coincide col centro di gravità e di massa del corpo. Perchè nel caso della caduta verticale e libera dei gravi la direzione della forza coincide con quella dello spostamento del centro di massa del corpo sul quale la forza agisce.
Pertanto se, nella nuova meccanica, si volesse dedurre la formola $P = m\,g$, la quale non è che la $f = m\,a$ nel caso della forza di gravità, si dovrebbe ripetere e dire quel che si dice nei vecchi trattati di meccanica e di fisica. E che qui si presuppone che il lettore sappia.

Suppongo di voler sollevare verticalmente più corpi di pesi P, 2 P, 3 P,... in modo diretto e col solo mezzo dei miei muscoli. Sento che al peso doppio, triplo,... debbo far corrispondere uno sforzo o forza doppia, tripla,... Cioè se lo sforzo relativo al sollevamento del peso *P* lo indico con *f*, trovo che quelli corrispondenti ai sollevamenti dei pesi 2 P, 3 P,... sono 2 f, 3 f,...

Se fo agire queste forze sopra uno stesso corpo, *e nelle stesse condizioni*, e per il fatto che l'accelerazione rappresenta l'effetto dell'azione di una forza, è naturale che alla forza doppia, tripla,... corrisponda un'accelerazione doppia, tripla,...

Come dicono Galileo e Newton.

Ma dico anche che ciò è vero quando sia soddisfatta la condizione che le forze agiscano nelle stesse condizioni sopra un corpo pure nelle stesse condizioni. Quando queste condizioni sono diverse debbo vedere quel che deve verificarsi e veder poi se l'esperienza conferma il ragionamento che io fò e la deduzione cui pervengo.

Ed allora dico:

Suppongo di voler sollevare più corpi di pesi P, 2 P, 3 P,... non più direttamente, ma servendomi di un'asta, o stanga, o leva, tenendo i corpi alla stessa distanza dall'asse di rotazione o fulcro. Indico con *f* lo sforzo o forza che corrisponde al peso *P*, agente sull'asta con braccio di leva *b*. Trovo che se il braccio di leva delle forze non varia, se è sempre lo stesso, al peso o resistenza doppia, tripla,... debbo far corrispondere una forza doppia, tripla,... Cioè le forze 2 f, 3 f,... Onde dico ancora che alle forze f, 2 f, 3 f,... agenti con egual braccio di leva e sopra uno stesso corpo ecc. devono corrispondere delle accelerazioni doppie, triple...

Ma un'altra cosa osservo. Ed è che quello stesso risultato che io ottengo, sollevando i corpi di pesi P, 2 P, 3 P,... con le forze f, 2 f, 3 f,... agenti con lo stesso braccio, io lo posso ottenere facendo agire sempre una stessa forza *f* ma con bracci b, 2 b, 3 b... cioè con braccio doppio, triplo,... Onde dico che la duplicazione, triplicazione,... del braccio di leva di una forza equivale ad una duplicazione, triplicazione,... della forza. Ed in quanto la duplicazione, triplicazione,... di una forza agente sopra uno stesso corpo, nelle stesse condizioni, deve avére per correlativa un'accelerazione doppia, tripla,... dico che ad una forza agente con braccio doppio, triplo,... deve corrispondere, o poter corrispondere, un'accelerazione doppia, tripla,...

Ed è questo che dice l'esperienza.

* * *

Secondo la nuova meccanica, adunque e come si è visto, devesi fare distinzione tra il caso di una forza agente senza braccio di leva e quello in cui questo braccio esiste. Fare distinzione tra il caso di una massa libera ed il caso di una massa vincolata. Fare distinzione tra il caso in cui la direzione della forza coincide, o no, con quella dello spostamento. Si ottiene, così facendo, il seguente

Secondo principio della nuova meccanica.

Nel moto dei corpi soggetti a forze devesi distinguere fra i casi seguenti:

1) La massa è libera, il punto di applicazione della forza coincide col centro della massa sulla quale la forza agisce, la direzione della forza coincide con quella dello spostamento del centro di massa. La forza agisce senza braccio di leva.

2) La massa è libera, ma la direzione della forza non è eguale a quella dello spostamento. La forza agisce ancora senza braccio di leva rispetto ad un asse o centro rigido e fisso.

3) La massa è vincolata ad un centro o ad un asse di rotazione rigido e fisso, nel quale caso il punto di applicazione della forza non coincide quasi mai col centro della massa sulla quale la forza agisce. A questi due punti competono, di solito, degli spostamenti diversi in tempi eguali, delle velocità, delle accelerazioni diverse. La forza agisce con un certo braccio di leva rispetto all'asse od al centro di rotazione rigido e fisso.

E si ha che:

Nel primo caso, o caso di una massa libera, e quando la direzione della forza è eguale a quella dello spostamento del centro di massa, ecc. le accelerazioni stanno fra di loro in ragione diretta delle forze ed in ragione inversa delle masse. Si verificano le relazioni $a = \frac{f}{m}$; $f = m\,a$. Come dice il secondo principio della meccanica di Galileo e di Newton.

Nel secondo caso, o caso di una massa libera, e quando la direzione della forza non è eguale a quella dello spostamento ecc., si verificano le relazioni

$$f = m\sqrt[2]{a_\tau^2 + a_n^2} = m\sqrt{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2} = m\sqrt{a^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2}$$

E non è in generale e sempre, ma solo nel caso in cui $\frac{v^2}{r} = o$ che si verifica la relazione $f = m\frac{d^2s}{dt^2} = m\,a$ esprimente il secondo principio della meccanica di Galileo e di Newton. Nel quale caso la forza componente normale alla traiettoria è zero, la direzione della forza coincide con quella dello spostamento, o della tangente alla traiettoria. E questa traiettoria è rettilinea.

Nel terzo caso infine, o caso di una massa vincolata ad un asse o ad un centro di rotazione rigido e fisso, ecc., le accelerazioni stanno fra di loro non in ragione diretta delle sole forze agenti, ma dei prodotti *f b* delle forze per i loro bracci di leva rispetto all'asse di rotazione. E stanno in ragione inversa non delle sole masse, ma dei prodotti *m r* delle masse per i loro raggi d'inerzia. Venendo a verificarsi le relazioni $a = \frac{f\,b}{m\,r}$; $f\,b = m\,r\,a$.

E si può dire che la formula $f = m\,a$ esprimente il secondo principio della meccanica di Galileo e di Newton si verifica ed è soddisfatta non in generale e sempre, ma solo nel caso particolare in cui risulta $b = r$, nel caso di una forza agente senza braccio di leva sopra una massa libera e quando la direzione della forza coincide con quella dello spostamento.